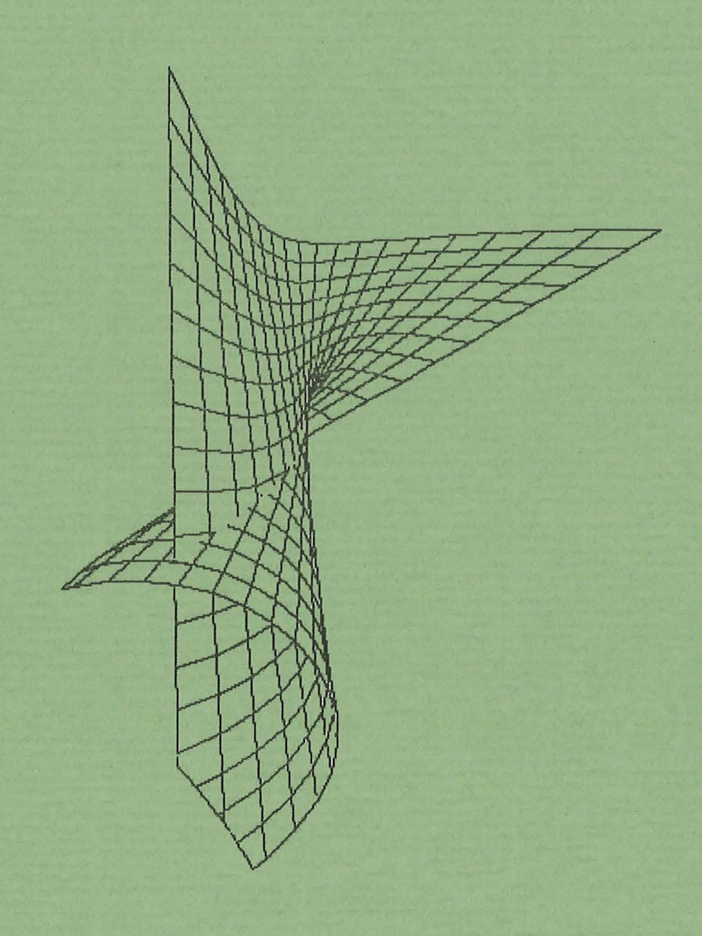
LAS SUPERFICIES REGLADAS

EN SUS REPRESENTACIONES PROPIAS

por

RAMÓN J. ZOIDO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-53-03

LAS SUPERFICIES REGLADAS

EN SUS REPRESENTACIONES PROPIAS

por

RAMÓN J. ZOIDO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-53-03

C U A D E R N O S
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

3 Área
53 Autor
03 Ordinal de cuaderno (del autor)

LAS SUPERFICIES REGLADAS En sus representaciones propias

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid
Gestión y portada: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 179.01
ISBN: 84-9728-134-9
Depósito Legal: M-49919-2004

LAS SUPERFICIES REGLADAS
EN SUS REPRESENTACIONES PROPIAS

Se describen aquí diversas cuestiones básicas de Geometría Diferencial en lo que se refiere al análisis clásico de las Superficies Regladas partiendo de sus parametrizaciones propias. Se pretende dar una visión general de algunos aspectos relacionados con estas superficies y explicar la disposición e interrelación de los diferentes vectores que intervienen en el análisis en los distintos casos: desarrollables y "alabeadas". El texto se acompaña con diferentes ejercicios sencillos pero representativos, relativos a las cuestiones más importantes planteadas tales como la clasificación de las superficies, el cálculo de la línea de estricción o la determinación de las generatrices "cilíndricas" en las no desarrollables. Se añaden algunas notas y diferentes referencias de carácter general sobre aspectos que, por diferentes motivos, pueden interesar en el contexto de estas superficies como son las trayectorias ortogonales de sus generatrices o los diferentes conjuntos de puntos centrales etc. Finalmente se introducen, desde algunas de sus propiedades significativas, tres superficies regladas clásicas de singular importancia: el paraboloide hiperbólico, el hiperboloide de revolución de una hoja y el helicoide recto.

Se ha dado importancia a las ilustraciones que muchas veces son las que nos permiten comprender las ideas expuestas; estas imágenes se han realizado apoyándose en un simple programa de representación de curvas y superficies auxiliado por un software común de tratamiento de imágenes.

En un trabajo con estas características, es inevitable la aparición de erratas o imprecisiones que se irán corrigiendo en revisiones posteriores.

§ 1.- Algunas consideraciones iniciales sobre las superficies parametrizadas.

A lo largo de todo este trabajo vamos a referiremos siempre a superficies $\underline{\mathbf{r}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ cubiertas con una sola parametrización. Consideraremos regiones finitas de la superficie delimitadas por el rango de variación de los parámetros lo que nos conduce a un estudio local de las mismas. Podemos, si se quiere, precisar que estamos hablando de "elementos de superficie" o de "superficies elementales". Solamente para ofrecer una visión más amplia de las características generales o de algunas propiedades de las superficies, superaremos idealmente los límites del fragmento considerado y podremos, por ejemplo, prolongar las rectas contenidas en él hasta el punto impropio del espacio proyectivo. En muchas ocasiones, haremos referencia a la superficie describiendo sólo la función vectorial sin especificar explícitamente el dominio que delimita el fragmento; debe sobrentenderse siempre la existencia de este dominio que nos permite convertirla en un objeto finito. Así, consideraremos, por ejemplo a las superficies parametrizadas:

$\underline{\mathbf{r}}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \{-\mathbf{sen}\ \mathbf{u} + \mathrm{v}\ \mathbf{cos}\ \mathbf{u}, \mathbf{cos}\ \mathbf{u} + \mathrm{v}\ \mathbf{sen}\ \mathbf{u}, \mathrm{v}\}$, $\underline{\mathbf{r}}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\ \mathbf{cos}\ \mathbf{u}\}$,

como (fragmentos de) un hiperboloide de una hoja o un conoide recto, respectivamente (figura 01). Sobre el hiperboloide de revolución se hablará en el **§ 16** y sobre los conoides en el **§ 14**. Estas dos superficies serán utilizadas en algunos ejercicios explicativos a lo largo del texto.

Nos limitaremos, así mismo, a superficies en las que exista un número finito de puntos singulares aislados – en los que se verifica $\underline{\mathbf{r}}_u \times \underline{\mathbf{r}}_v = \mathbf{0}$ –, o bien, conjuntos de puntos singulares agrupados a lo largo de un número finito de diferentes líneas. Tanto el hiperboloide como el conoide, descritos por las parametrizaciones anteriormente citadas, carecen por ejemplo de puntos singulares y son, en cualquiera de sus fragmentos, superficies regulares. Como veremos a lo largo del texto, en las superficies regladas nos vamos a encontrar básicamente con tres tipos de singularidades: las singularidades "ficticias" debidas a la inadecuada – o menos adecuada – elección de los parámetros, las singularidades heredadas por la superficie de los elementos constitutivos de su construcción – fundamentalmente las directrices – y la singularidades "estructurales" o propias de las superficies debidas a sus características específicas; estas dos últimas son, generalmente, "intrínsecas" o ligadas a su forma. Añadiremos, finalmente, que la posibilidad de generación de regladas con singularidades intrínsecas proporciona a estas superficies interés desde el punto de vista creativo, constructivo y estético.

§ 2.- Superficies regladas representadas en su parametrización propia. Descripción paramétrica.

En las condiciones anteriores, una superficie reglada o, si se quiere, una superficie reglada elemental, es una superficie tal que por cada punto de la misma pasa una recta que está contenida toda ella en la superficie. La superficie se convierte así en un conjunto simple de rectas en $\mathfrak{R}^3$. Cada una de estas rectas constituyen lo que denominamos las **generatrices** de la superficie reglada. Podemos contemplar también la superficie, si se quiere, como un lugar geométrico generado por una sola recta que va modificando su lugar en el espacio, adoptando diferentes posiciones al variar, de forma regular, un parámetro.

Aunque una recta puede adquirir múltiples representaciones paramétricas, sabemos que la parametrización vectorial propia de una recta que pasa por el punto **(a, b, c)** y cuya dirección es la del vector $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, resulta ser la representación lineal – en el parámetro "v" –:

$\underline{\mathbf{r}}(\mathrm{v}) = \{\mathbf{a} + \mathrm{v}\ \alpha, \mathbf{b} + \mathrm{v}\ \beta, \mathbf{c} + \mathrm{v}\ \gamma\} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \mathrm{v}\ \{\alpha, \beta, \gamma\}$, en la que debe ser $\{\alpha, \beta, \gamma\} \neq \mathbf{0}$,

de la que se deducen, trivialmente, las ecuaciones cartesianas:

$\mathrm{x} = \mathbf{a} + \mathrm{v}\ \alpha \quad \mathrm{y} = \mathbf{b} + \mathrm{v}\ \beta \quad \mathrm{z} = \mathbf{c} + \mathrm{v}\ \gamma$, con $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$,

De acuerdo con lo anterior, la descripción analítica de una superficie reglada deberá poder ser la de un conjunto de rectas dependientes de un solo parámetro $\mathbf{u} \in \mathbf{I} \subset \mathfrak{R}$, resultando las ecuaciones cartesianas:

$\mathrm{x} = \mathrm{x}(\mathrm{u}) + \mathrm{v}\ \alpha(\mathrm{u})$, $\mathrm{y} = \mathrm{y}(\mathrm{u}) + \mathrm{v}\ \beta(\mathrm{u})$, $\mathrm{z} = \mathrm{z}(\mathrm{u}) + \mathrm{v}\ \gamma(\mathrm{u})$, con $\alpha(\mathrm{u})^2 + \beta(\mathrm{u})^2 + \gamma(\mathrm{u})^2 \neq 0$,

o la representación vectorial: $\underline{\mathbf{r}}(\mathbf{u}, \mathrm{v}) = (\mathbf{a}(\mathbf{u}), \mathbf{b}(\mathbf{u}), \mathbf{c}(\mathbf{u})) + \mathrm{v}\ \{\alpha(\mathbf{u}), \beta(\mathbf{u}), \gamma(\mathbf{u})\}$, con $\{\alpha(\mathbf{u}), \beta(\mathbf{u}), \gamma(\mathbf{u})\} \neq \mathbf{0}$.

Esta parametrización manifiesta explícitamente, tanto desde el punto de vista analítico como desde el punto de vista gráfico o constructivo, el carácter reglado de la superficie por lo que es denominada una "**parametrización o representación reglada**" propia de estas superficies que, como ecuación vectorial de una recta variable en $\mathfrak{R}^3$, resulta ser una expresión lineal en uno de los parámetros, en nuestro caso el "v". Eligiendo, si se quiere, la forma "continua" para tal representación, la superficie podrá describirse en función del parámetro "u", en la forma:

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{u})}{\text{á}(\mathbf{u})} = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}(\mathbf{u})}{\hat{\text{a}}(\mathbf{u})} = \frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}(\mathbf{u})}{\tilde{\text{a}}(\mathbf{u})}.$$

Recíprocamente, toda superficie que pueda representarse vectorialmente en la forma:

$\underline{\mathbf{r}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{x}(\mathbf{u}), \mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{z}(\mathbf{u})) + \mathbf{v}\ \{\alpha(\mathbf{u}), \beta(\mathbf{u}), \gamma(\mathbf{u})\} = \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) + \mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}(\mathbf{u})$ (1)

constituye, trivialmente, la ecuación de una recta variable dependiente del parámetro "**u**", por lo que representa una superficie reglada, así que esta parametrización "reglada" resulta también privativa de estas superficies.

Podemos decir, por lo tanto, que el hiperboloide $\underline{\mathbf{r}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{-\mathbf{sen\ u} + \mathbf{v}\ \mathbf{cos\ u}, \mathbf{cos\ u} + \mathbf{v}\ \mathbf{sen\ u}, \mathbf{v}\}^{(1)}$ constituye una superficie reglada –descrita en una de sus parametrizaciones propias–, puesto que puede escribirse:

$(-\mathbf{sen\ u} + \mathbf{v}\ \mathbf{cos\ u}, \mathbf{cos\ u} + \mathbf{v}\ \mathbf{sen\ u}, \mathbf{v}) = (-\mathbf{sen\ u}, \mathbf{cos\ u}, 0) + \mathbf{v}\ \{\mathbf{cos\ u}, \mathbf{sen\ u}, 1\}$,

y, así mismo, lo será el conoide $\underline{\mathbf{r}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\ \mathbf{cos\ u}\}^{(2)}$, puesto que $(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\ \mathbf{cos\ u}) = (0, \mathbf{u}, 0) + \mathbf{v}\ \{1, 0, \mathbf{cos\ u}\}$.

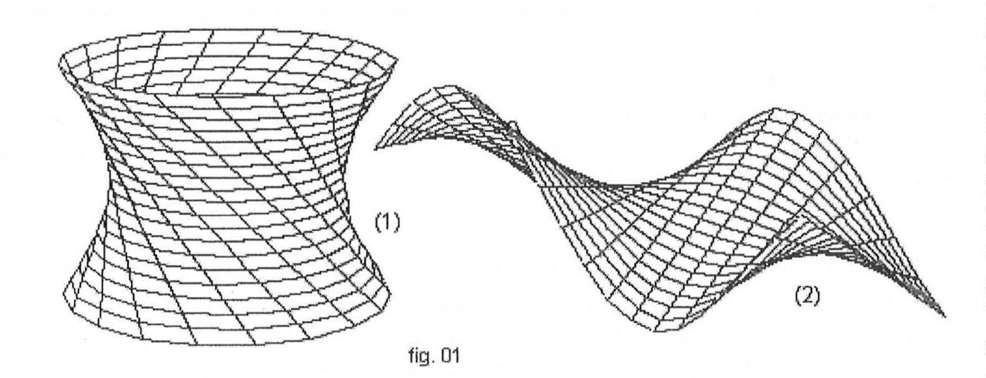


fig. 01

En la figura 01 se han representado gráficamente estas superficies respecto a las parametrizaciones (1) y (2) anteriores. Se puede observar inmediatamente que una de las familias de curvas coordenadas son las rectas generatrices por lo que la "reconstrucción" física muestra explícitamente su carácter reglado.

Encontramos en la representación (1) dos funciones vectoriales de la variable real "**u**", sobre las que deberán ser impuestas condiciones suficientes de regularidad. Una de ellas es la función que determina los puntos de este conjunto simplemente infinito de rectas:

$\underline{\mathbf{D}} = (\mathbf{x}(\mathbf{u}), \mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{z}(\mathbf{u}))$,

cuya imagen representará una línea en $\Re^3$, la otra es la que determina las direcciones de las generatrices:

$\underline{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) = \{\alpha(\mathbf{u}), \beta(\mathbf{u}), \gamma(\mathbf{u})\}$, con $\underline{\mathbf{d}} \neq \mathbf{0}$.

Congruentemente con la idea de superficie, las funciones involucradas en la representación deberán ser continuas. Esta exigencia sería suficiente si no nos encontráramos con que sus derivadas juegan un importante papel en su adecuación cualitativa, por lo que hablaremos de funciones de "suficiente regularidad" haciendo alusión a la clase –derivación más continuidad– de las funciones $\underline{\mathbf{D}}$ y $\underline{\mathbf{d}}$, lo que garantiza esta adecuación. Lo usual es encontrar a lo largo de este texto primeras y segundas derivadas de estas funciones así que para evitar ambigüedades por "suficiente regularidad" deberemos entender que estas funciones son al menos $\mathbf{C}^2(\mathbf{I})$, aunque condiciones menos exigentes pueden describir perfectamente estos objetos. No obstante, las funciones que utilizaremos serán funciones muy elementales y tendrán derivadas continuas de todos los órdenes. A este respecto, se puede decir que utilizando funciones sencillas, tales como polinomios, funciones circulares o hiperbólicas, exponenciales, etc, podemos representar una ilimitada variedad de superficies constituidas por rectas con apariencias y peculiaridades tan complejas como deseemos. En la figura 02 se muestran algunos ejemplos entre los que se encuentran superficies muy notorias, algunas de las cuales tendremos ocasión de introducir en el texto.

Se representan en esta figura 02 fragmentos de superficies regladas comunes utilizando funciones elementales usuales. Sus representaciones paramétricas y rango de variación de los parámetros son: $(-\mathbf{v\ sen\ u}, \mathbf{sen\ u} + \mathbf{cos\ u}, \mathbf{u}+\mathbf{v})^{(1)}$ con $\mathbf{u} \in [-3\pi/2, \pi/2]$, $\mathbf{v} \in [-1,1]$; $((1+\mathbf{v})\ \mathbf{cos\ u}, (1-\mathbf{v})\ \mathbf{sen\ u}, 2\mathbf{v})^{(2)}$ con $\mathbf{u} \in [0,2\pi]$, $\mathbf{v} \in [-2,2]$; $((\mathbf{v}+3)\ \mathbf{cos\ u}, 4\ \mathbf{v\ sen\ u}, 5\ \mathbf{v}\ \mathbf{sen}^2\mathbf{u})^{(3)}$ con $\mathbf{u} \in [0,2\pi]$, $\mathbf{v} \in [-1,1]$; $(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}, \mathbf{v\ sen\ u})^{(4)}$ con $\mathbf{u} \in [-2\pi, 2\pi]$, $\mathbf{v} \in [-5,5]$; $(\mathbf{u}^2+\mathbf{v}, \mathbf{u\ v\ cos\ u}, \mathbf{v})^{(5)}$ con $\mathbf{u} \in [-2,2]$, $\mathbf{v} \in [-2,2]$; $(\mathbf{u\ v}, \mathbf{v}(1-\mathbf{u}^2), (1-\mathbf{v})\ (1-\mathbf{u}^2))^{(6)}$ con $\mathbf{u} \in [1,-1]$, $\mathbf{v} \in [-1,1]$; $(\mathbf{v}, \mathbf{v}\ \mathbf{e}'', \mathbf{u}\ (1-\mathbf{v}))^{(7)}$ con $\mathbf{u} \in [-3,3]$, $\mathbf{v} \in [-3,3]$; $(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{v\ sen\ u}, \mathbf{u\ sen\ u} - \mathbf{u\ v})^{(8)}$ con $\mathbf{u} \in [-3,3]$, $\mathbf{v} \in [-3,3]$; y finalmente la $(\mathbf{v}(1 \pm \mathbf{sen\ u}), \mathbf{cos\ u}, (1-\mathbf{v})\ \mathbf{sen\ u})^{(9)}$ con $\mathbf{u} \in [0,2\pi]$, $\mathbf{v} \in [-1,3]$.

La representación (1): $\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) + \mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}(\mathbf{u})$, muestra, además, la superficie como un conjunto simplemente infinito de rectas que pueden manifestarse explícitamente dando diferentes valores al parámetro "**u**" dentro de su rango de variación obteniendo así la ecuación vectorial de las rectas generatrices. Del hiperboloide $(-\mathbf{sen\ u}, \mathbf{cos\ u}, 0) + \mathbf{v}\ \{\mathbf{cos\ u}, \mathbf{sen\ u}, 1\}$ podemos seleccionar, por ejemplo, las generatrices correspondientes a

$\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{u} = \pi/2$, $\mathbf{u} = \pi$ ...etc,

que proporcionan respectivamente las parametrizaciones de las rectas:

$(0, 1, 0) + \mathbf{v}\ \{1, 0, 1\}$, $(-1, 0, 0) + \mathbf{v}\ \{0, 1, 1\}$, $(0, -1, 0) + \mathbf{v}\ \{-1, 0, 1\}$ ...etc.

Análogamente sobre el conoide **(0, u, 0) + v {1, 0, cos u}** podemos seleccionar las rectas:

u = 0, **u = π/2,** **u = π** ...etc,

y las representaciones paramétricas de las de las generatrices serán:

(0, 0, 0) + v {1, 0, 1}, **(0, π/2, 0) + v {1, 0, 0},** **(0, π, 0) + v {1, 0, –1}** ...etc.

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9)

fig. 02

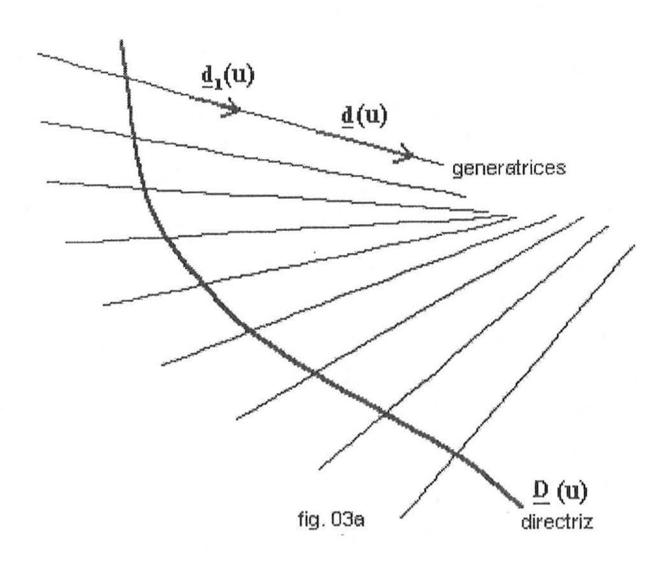


fig. 03a

Por otro lado, esta representación "reglada" (1) nos permite contemplar la superficie como un lugar geométrico generado por rectas (generatrices) de dirección variable **d (u)** que "se apoyan", "pasan" o "cortan" a una curva **D (u)** a lo largo de sus correspondientes puntos (figura 03a). Manifiesta analíticamente una versión "constructiva" de estas superficies que consiste en elegir una línea **D (u)** que denominamos **directriz** y definir la **dirección de las generatrices d (u)**, ligadas ambas funciones en la ecuación vectorial por el parámetro lineal "**v**". Desde este punto de vista, las dos funciones vectoriales del mismo parámetro **D** y **d**, representarían en la superficie un papel cualitativamente diferente, ya que la primera sería una línea en $\Re^3$ en tanto la segunda es la dirección de una recta, de manera que cualquier otro vector "paralelo" o

"equivalente" al $\underline{d}$ nos determinará la misma superficie siempre que resulte no nulo para cualquier valor del parámetro "u". Esta diferencia cualitativa la venimos representando con la notación "( )" para las componentes de $\underline{D}$ (línea), en tanto conservaremos la notación "{ }" (vector) para la dirección $\underline{d}$, sin que esto suponga restricción a la hora de efectuar las operaciones usuales de suma o resta con las funciones vectoriales que las definen analíticamente. Finalmente, utilizaremos indistintamente la notación "( )" para la superficie como conjunto de puntos de $\Re^3$ (imagen de $\underline{r}$), o la notación "{ }" si la hacemos preceder del vector $\underline{r}$ **(u, v)**.

Por lo dicho, dependiendo del rango de variación de los parámetros, las representaciones:

$$(-\text{sen } u, \cos u, 0) + v\,\{\cos u, \text{sen } u, 1\} = (-\text{sen } u + v \cos u, \cos u + v\,\text{sen } u,\ v),$$

$$(-\text{sen } u, \cos u, 0) + v\,\{\frac{\cos u}{1+u^2}, \frac{\text{sen} u}{1+u^2}, \frac{1}{1+u^2}\} = (-\text{sen } u + v\,\frac{\cos u}{1+u^2}, \cos u + v\,\frac{\text{sen} u}{1+u^2}, v\,\frac{1}{1+u^2}),$$

que para determinar la dirección de las generatrices utilizan dos vectores "paralelos" o "equivalentes" – de distinto módulo pero con la misma dirección de la recta que los contiene –, representan iguales o diferentes fragmentos del mismo conjunto de puntos de $\Re^3$ y las denominaremos parametrizaciones **equivalentes** del hiperboloide alabeado. Lo mismo ocurre, por ejemplo, con las dos representaciones del conoide:

$$(0, u, 0) + v\,\{1, 0, \cos u\} = (v, u, v \cos u)$$

$$(0, u, 0) + v\,\{e^u, 0, e^u \cos u\} = (v\,e^u, u, v\,e^u \cos u)$$

que se convierten en dos parametrizaciones equivalentes del mismo. En ambos casos, para definir fragmentos iguales se requiere el cálculo concordante del rango de variación de los parámetros.

Desde un punto de vista puramente práctico, tampoco hay que dar excesiva importancia el hecho de trabajar con un vector dirección $\underline{d}$ que sea nulo para algún valor del parámetro "u" siempre que sea "artificialmente" nulo, es decir, tal que alguno de sus vectores equivalentes no lo sea. Utilizar, por ejemplo, representaciones del hiperboloide y del conoide anteriores, con parametrizaciones tales como:

$(-\text{sen } u, \cos u, 0) + v\,\{ u \cos u, u\,\text{sen } u, u\}$, $\quad (0, u, 0) + v\,\{\text{sen } u, 0, \text{sen } u \cos u\}$,

en las que las direcciones de las generatrices se anulan para el valor **u = 0**. Esto introduce una singularidad desde el punto de vista conceptual y teórico pero desde el punto de vista práctico estas anomalías pueden ser reinterpretadas o corregidas fácilmente. El uso de la dirección equivalente unitaria impide estas posibles representaciones poco adecuadas.
Sin embargo, superficies tales como

$(\cos u, \text{sen } u, 0) + v\,\{ \text{sen } u, u^2, u^3\}$, $\quad (0, u, 0) + v\,\{\text{sen } u, 0, u\}$,

constituyen auténticas singularidades entre las regladas y no son tratadas aquí. En cada punto de las mismas no existe una recta generatriz toda ella contenida en la superficie y por lo tanto no satisfacen la definición dada ni quedan recogidas dentro de la primera clasificación que se dará en el § **6**. Pueden ser, naturalmente, analizadas siempre que se las excluya de buena parte de la teoría que aquí se presenta.

La representación $\underline{D}$ **(u)** + v $\underline{d}_1$ **(u)**, siendo $\underline{d}_1$ la dirección unitaria de las generatrices: $\underline{d}_1(u) = \dfrac{\underline{d}(u)}{|\underline{d}(u)|}$,

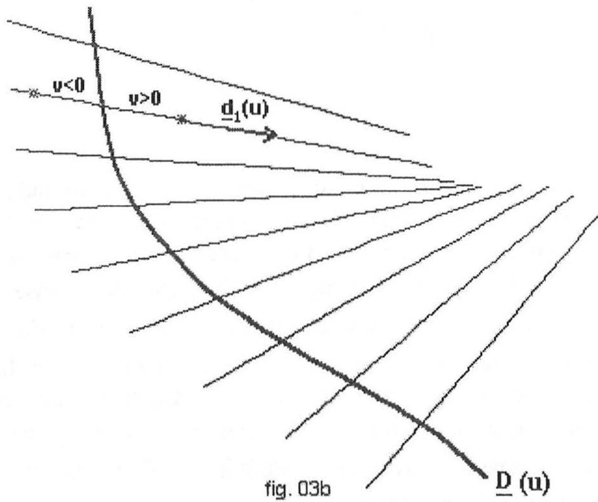


fig. 03b

no es relevante a efectos puramente prácticos e introduce cálculos más laboriosos, así que, en este contexto, trataremos siempre de simplificar la función $\underline{d}$ utilizando el vector equivalente más sencillo. El uso de tal representación, sin embargo, presenta ventajas que facilitan el análisis de las características –teóricas, por así decirlo– de la superficie; especialmente nos simplifican la descripción y las relaciones entre los vectores que determinan tales características, así que utilizaremos esta parametrización en distintas ocasiones para describir estas relaciones, introduciendo posteriormente en las fórmulas las correcciones necesarias para la utilización de una parametrización más general. Se observa inmediatamente que el uso del vector $\underline{d}_1$ en la representación paramétrica determina que el parámetro "v" se convierta en cada punto de la superficie en la distancia del segmento que sobre cada generatriz limita el punto y la intersección de la generatriz con la directriz $\underline{D}$ elegida, a ambos lados de ésta según que **v > 0** ó **v > 0** (figura 3b).

Utilizando esta representación, la parametrización equivalente del hiperboloide reglado sería:

$$(-\text{sen } u, \cos u, 0) + v\,\{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos u, \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } u, \frac{1}{\sqrt{2}}\} = (-\text{sen } u + \frac{v}{\sqrt{2}} \cos u, \cos u + \frac{v}{\sqrt{2}}\,\text{sen } u, \frac{v}{\sqrt{2}}).$$

y la del conoide **(0, u, 0)** + v **{1, 0, cos u}** = **(v, u, v cos u)**, resultaría ser:

$$(0, u, 0) + v\,\{\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u}}, 0, \frac{\cos u}{\sqrt{1+\cos^2 u}}\} = (\frac{v}{\sqrt{1+\cos^2 u}}, u, \frac{v \cos u}{\sqrt{1+\cos^2 u}}).$$

Se comprende inmediatamente que utilizar la representación equivalente con $\underline{d}_1$ en el caso el conoide, por ejemplo, introduce complicaciones innecesarias a la hora de efectuar cálculos como el de sus primeras o segundas derivadas. Esto se pone claramente de manifiesto en la mayoría de los casos en los que el vector que determina las direcciones de las generatrices no tiene un módulo que permita simplificaciones.

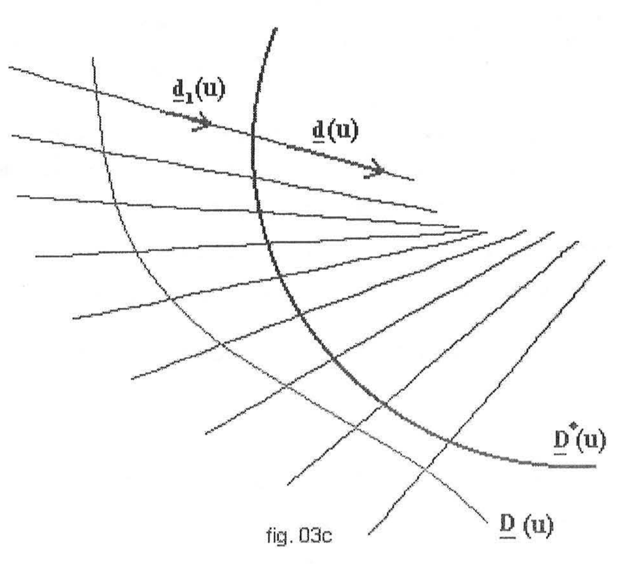


fig. 03c

Por otra parte, se comprende que cualquier curva tomada adecuadamente sobre la superficie y que corte a todas las generatrices nos puede servir como directriz para la misma representación, así que para describir el mismo o un fragmento diferente del mismo conjunto de puntos de $\mathfrak{R}^3$, según el rango de variación de los parámetros, pueden obtenerse diferentes representaciones también **equivalentes** de la superficie. Es decir,

D (u)+v d (u) y **D *(u)+v d (u),**

son parametrizaciones equivalentes si las curvas **D (u)** y **D *(u)**, contenidas en la superficie, cortan a todas las rectas generatrices de la misma (figura 03c).

Si partimos ahora de cualquier parametrización arbitraria:

r (u, v) = **D** (u)+v **d** (u),

podemos definir una función adecuada, suficientemente regular, v = **v (u)** que nos permite obtener cualquier otra curva sobre la superficie:

D (u)+v(u) **d** (u) = **D** *(u),

que, en general, cortará a todas las generatrices y que por lo tanto puede ser tomada como nueva directriz de la superficie cuya representación será ahora:

D *(u)+v **d** (u) = **D** (u)+v(u) **d** (u)+v **d** (u)= **D** (u)+(v+ v(u)) **d** (u),

así que **D** (u)+ v **d** (u) y **D** (u)+(v+ v(u)) **d** (u), en estas condiciones, serán parametrizaciones equivalentes.

De todo ello se deduce que, en lo referente a la descripción paramétrica de una superficie reglada, existen múltiples representaciones propias de una superficie reglada, pudiendo, por un lado, utilizar diferentes directrices **D** y, por otro, utilizar cualesquiera de las direcciones equivalentes **d** de sus generatrices, entre las cuales se puede destacar el uso del vector unitario $\underline{d}_1$. Además, resultarán equivalentes las parametrizaciones **D (u)+v(u) d (u)** y **D (u)+(v+ g(u)) d (u)** que formalmente resultan de sustituir en la primera el parámetro "**v**" por "**v+ g(u)**" siendo **g(u)** una función regular adecuada.

Esta relación de equivalencia entre parametrizaciones proviene de hacer prevaler la versión "constructiva" de estas superficies, es decir, las superficies vistas como conjunto de una curva directriz más las rectas generatrices que en ella se apoyan, y de considerar su unicidad cuando ambas cosas están perfectamente definidas e individualizadas.

Añadiremos finalmente que puede resultar significativo considerar el conjunto de vectores $\underline{d}_1$ **(u)** llevados al origen de coordenadas **O ≡(0, 0, 0)**. El lugar geométrico de sus extremos es, trivialmente, una curva sobre la esfera de radio unidad con centro en **O**, denominada **imagen** o **traza esférica** de la superficie reglada, intersección a su vez de la esfera con el **cono director** de la superficie que es la superficie cónica de vértice **O** con generatrices en la dirección de $\underline{d}_1$ **(u)** –o bien **d (u)**–.

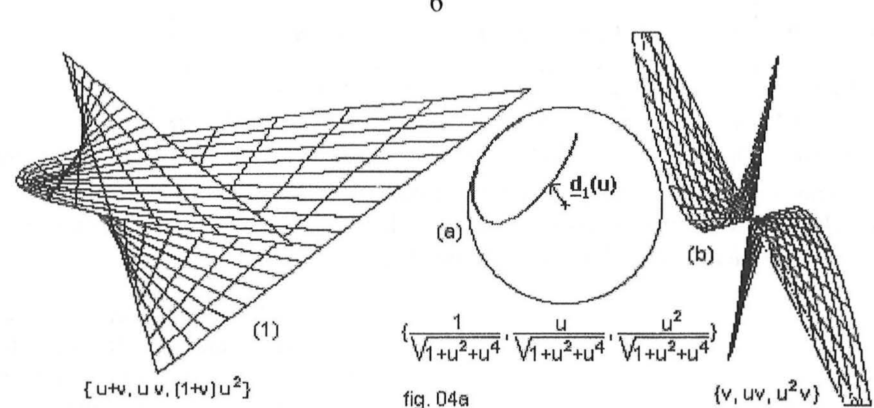


fig. 04a

Esta imagen es una indicatriz que permite observar de forma independiente la ley de variación de la dirección de las generatrices. En la figura 04a se representa la traza esférica [a] y el cono director [b] del fragmento de superficie reglada [1]. Una parametrización de la traza esférica viene determinada por el propio vector $\underline{\mathbf{d}}_1\,\mathbf{(u)}$ convertido ahora en la representación de una curva $\underline{\mathbf{e}}\,\mathbf{(u)} \equiv \underline{\mathbf{d}}_1\,\mathbf{(u)}$, en tanto el cono director podrá representarse por $\underline{\mathbf{c}}\,\mathbf{(u,v)} \equiv \mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}_1\,\mathbf{(u)}$. Así, la traza esférica del hiperboloide **(−sen u, cos u, 0) + v {cos u, sen u, 1}** será la curva $\underline{\mathbf{e}}\,\mathbf{(u)}=(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathbf{cos\ u}, \frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathbf{sen\ u}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, y el cono director la superficie $\underline{\mathbf{c}}$ **(u,v)=(v cos u, v sen u, v)**, en tanto la traza o imagen esférica del conoide **(v, u, v cos u)** = **(0, u, 0)+v {1, 0, cos u}** será la curva:

$$\underline{\mathbf{e}}\,\mathbf{(u)}=(\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u}}, 0, \frac{\cos u}{\sqrt{1+\cos^2 u}})$$ y su cono director la superficie: **(v, 0, v cos u)**, que en este caso degenera en un plano.

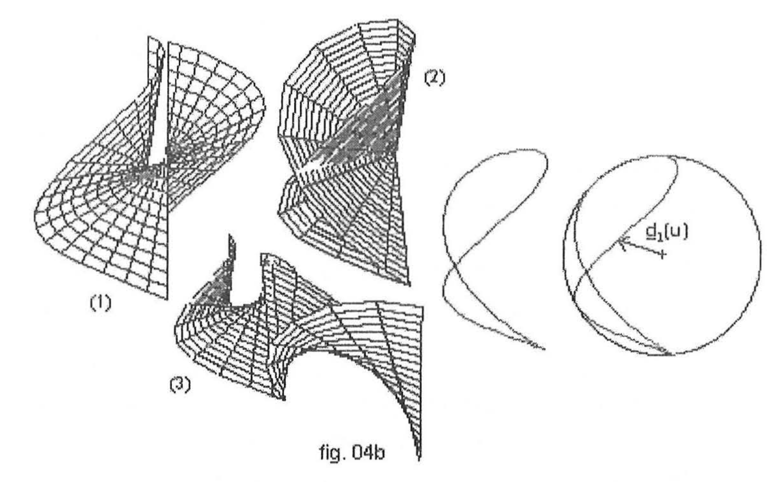


fig. 04b

Superficies diferentes pueden compartir la misma traza esférica (figura 04b) y en algunos casos esta curva nos permitirá reconocer la superficie. Trivialmente, por ejemplo, en los cilindros la traza esférica se convertirá en un punto, los helicoides **−§17−** tendrán por traza un arco de circunferencia, en los conoides **−§14−** y, en general, en las superficies "**de Catalán**" será un arco de circunferencia máxima...etc. (figuras 04c).

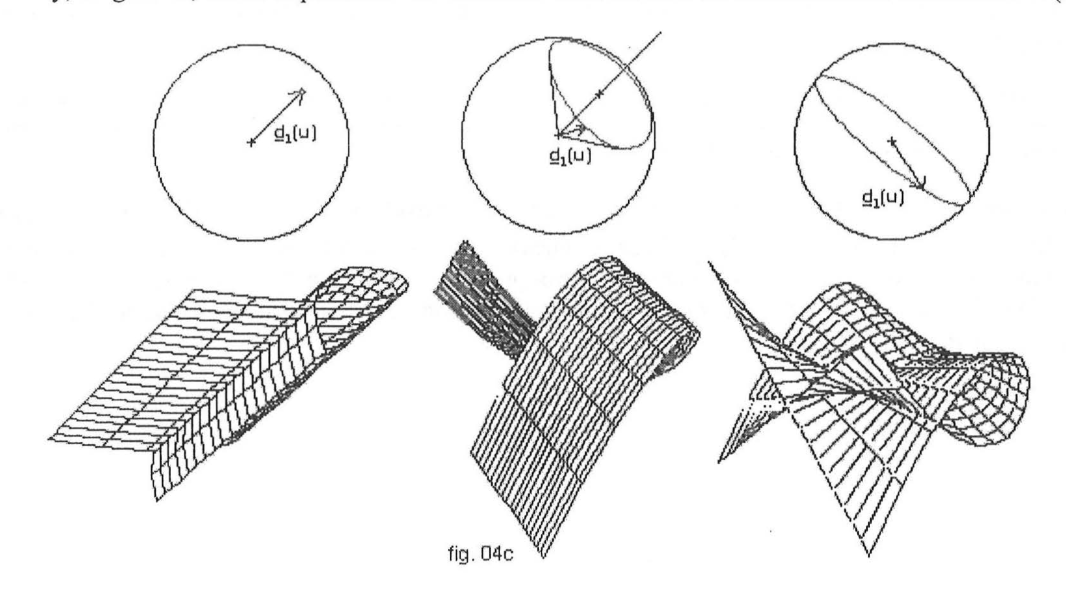


fig. 04c

§ 3.- Primeras características generales. Variación de los planos tangentes a lo largo de una generatriz.

Definida una superficie reglada por su representación paramétrica $\underline{\mathbf{r}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u})+\mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}(\mathbf{u})$, sus curvas coordenadas, "**curvas v**" o "**curvas u = cte**", vendrán representadas por:

$\underline{\mathrm{D}}(\mathrm{C})+ \mathrm{v}\ \underline{\mathrm{d}}(\mathrm{C})$, C = **cte**,

que son las rectas generatrices (para cada uno de los valores **u** = C). De esta forma en las parametrizaciones regladas de las superficies, una de las familias de curvas coordenadas son rectas, lo que nos permite, como se ha dicho, visualizarlas como regladas en su representación gráfica. Aunque resulte reiterativo, desde el punto de vista práctico es muy importante insistir en que para fijar cualquier generatriz de una superficie descrita en la forma $\underline{\mathrm{D}}(\mathbf{u})+\mathrm{v}\ \underline{\mathrm{d}}(\mathbf{u})$, sean cuales sean las condiciones que la individualicen, basta determinar el correspondiente valor del parámetro "**u**".

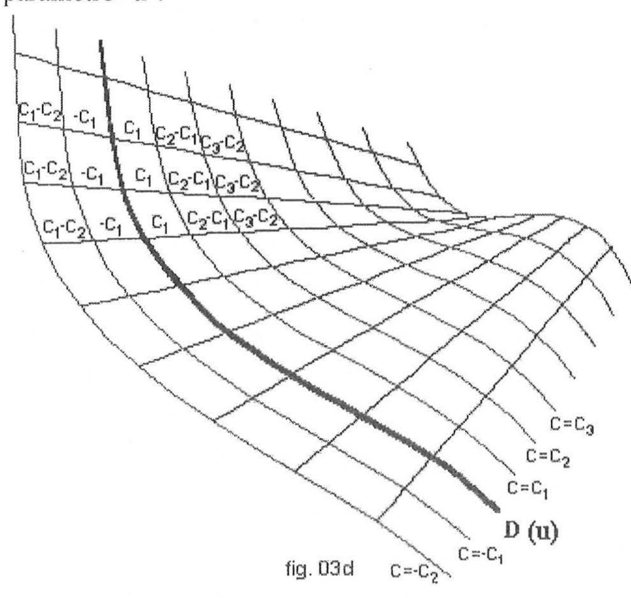


fig. 03d

Las "**curvas u**" o "**curvas v = cte**" vendrán representadas por:

$\underline{\mathrm{D}}(\mathbf{u})+ \mathrm{C}\ \underline{\mathrm{d}}(\mathbf{u})$, C = **cte**,

que representan curvas sobre la superficie que, trivialmente, cortan a todas las generatrices y que por lo tanto pueden ser tomadas como nuevas directrices para otra representación equivalente. Estas curvas pueden localizarse con más sencillez si utilizamos la representación $\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) +\mathrm{v}\ \underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u})$ en la que sus puntos de intersección con las generatrices se encuentran a distancias "C" – medidas sobre cada generatriz – de su intersección con la directriz $\underline{\mathrm{D}}$ (figura 03d).

Como se sabe, las familias de curvas coordenadas sobre la superficie son las curvas integrales de los vectores $\underline{\mathrm{r}}_\mathrm{u}$ y $\underline{\mathrm{r}}_\mathrm{v}$, respectivamente. Estos vectores determinan sus tangentes en cada punto regular y toman aquí la forma:

$$\underline{\mathrm{r}}_\mathrm{u} = \dot{\underline{\mathrm{D}}}(\mathbf{u})+ \mathrm{v}\ \dot{\underline{\mathrm{d}}}(\mathbf{u}), \qquad \underline{\mathrm{r}}_\mathrm{v} = \underline{\mathrm{d}}(\mathbf{u}).$$

En cada punto regular **P**, el plano tangente $\mathbf{T_P}$ está determinado por **P** y por $\underline{\mathrm{r}}_\mathrm{u}$ y $\underline{\mathrm{r}}_\mathrm{v}$, así que en las superficies regladas el plano tangente contiene a la generatriz que pasa por **P** puesto que contiene a **P** y a $\underline{\mathrm{r}}_\mathrm{v}$. Esto quiere decir que el haz de planos tangentes correspondiente a los distintos puntos de una generatriz tiene como recta común la propia generatriz.

Consecuentemente con la definición dada, las superficies regladas pueden ser contempladas como un conjunto de rectas. De la misma manera que el conjunto de planos tangentes a la superficie puede segregarse en familias de planos con una recta común – la generatriz correspondiente –, muchas de las características y propiedades de estas superficies también se "estratifican" en el conjunto simplemente infinito de las generatrices, así que resulta adecuado analizar el comportamiento de cada una de las familias de planos tangentes a lo largo de una generatriz de puntos regulares y de los vectores que los determinan.

El vector característico de $\mathbf{T_P}$ determina la dirección de la normal a la superficie $\underline{\mathbf{n}}$ en **P** con la dirección del vector: $\underline{\mathrm{r}}_\mathrm{u} \times \underline{\mathrm{r}}_\mathrm{v} = (\dot{\underline{\mathrm{D}}} +\mathrm{v}\ \dot{\underline{\mathrm{d}}})\times \underline{\mathrm{d}} =(\dot{\underline{\mathrm{D}}} \times \underline{\mathrm{d}})+\mathrm{v}\ (\dot{\underline{\mathrm{d}}} \times \underline{\mathrm{d}})$. En general este vector varía – su módulo y su dirección – a lo largo de cada generatriz **u = cte** debido a la variación del parámetro "**v**", manteniéndose los vectores $\dot{\underline{\mathrm{D}}} \times \underline{\mathrm{d}}$ y $\dot{\underline{\mathrm{d}}} \times \underline{\mathrm{d}}$ – que solo dependen de "**u**" – constantes. Esto determina, consecuentemente, la variación del plano tangente a lo largo de la generatriz sin dejar de contener al vector $\underline{\mathbf{d}}$. En la figura 05 se ha elegido la generatriz $\mathbf{u= -\pi/2}$ del hiperboloide (**−sen u+v cos u, cos u+v sen u, v**) para mostrar la variación del vector $\underline{\mathrm{r}}_\mathrm{u} \times \underline{\mathrm{r}}_\mathrm{v}$ y la variación del plano normal que contiene a la generatriz **u= 0** a lo largo de un fragmento de paraboloide hiperbólico **{u, v, u v}**.

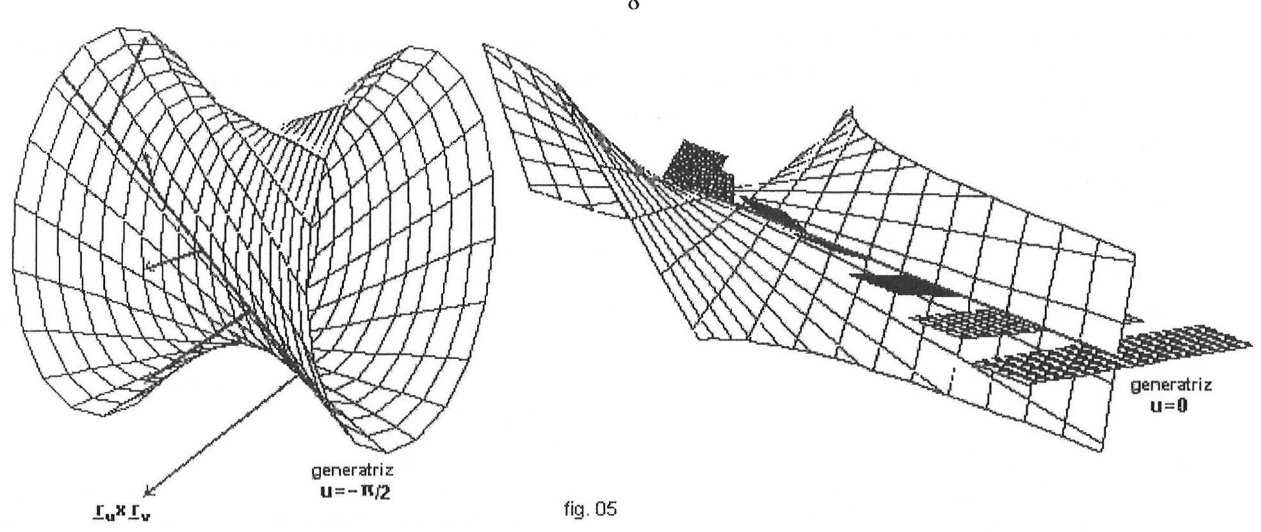
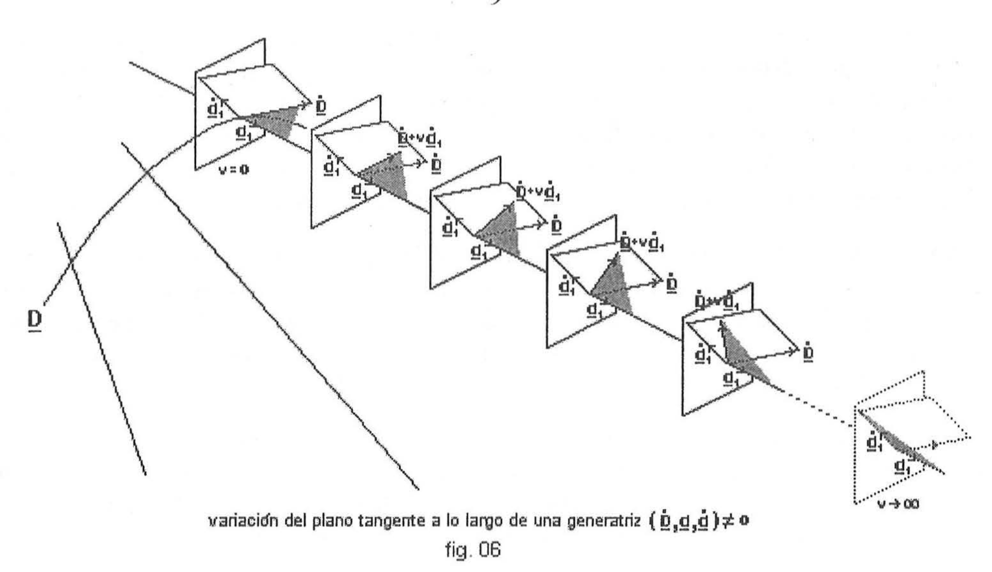


fig. 05

Vinculado a la variación del vector $\underline{r}_u \times \underline{r}_v$ aparecen tres vectores básicos: $\dot{\underline{D}}, \underline{d}$ y $\dot{\underline{d}}$, siendo $\dot{\underline{D}}$ un vector con la dirección de la tangente a la directriz, y $\underline{d}$ un vector con la dirección de las generatrices. Después están los dos productos vectoriales $\dot{\underline{D}} \times \underline{d}$ y $\dot{\underline{d}} \times \underline{d}$, y finalmente está el vector $(\dot{\underline{D}} \times \underline{d}) + v\,(\dot{\underline{d}} \times \underline{d}) = \underline{r}_u \times \underline{r}_v$. Todos estos vectores, en el caso más general, tendrán diferentes direcciones –y módulos–, por lo que puede ser conveniente detenernos ahora en describir la situación relativa al menos de los tres vectores básicos a lo largo de cualquiera de las generatrices. Consideraremos el caso más general posible en que, además de ser $\underline{d} \neq 0$, sean $\dot{\underline{D}}$ y $\dot{\underline{d}}$ no nulos y de que los tres sean linealmente independientes. Teniendo en cuenta las propiedades del producto mixto de vectores, esta disposición general la representaremos por $(\dot{\underline{D}}, \underline{d}, \dot{\underline{d}}) \neq 0$ (vectores no nulos y no coplanarios). Existen naturalmente casos particulares – importantes – en los que esta disposición general se simplifica notablemente como consecuencia de ser, por distintas razones, $(\dot{\underline{D}}, \underline{d}, \dot{\underline{d}}) = 0$ y que posteriormente tendremos ocasión de analizar; ahora se trata de conocer las posiciones relativas de estos vectores en el caso más general.

A lo largo de una generatriz **u=u**, los vectores $\dot{\underline{D}}(u)$, $\underline{d}(u)$, $\dot{\underline{d}}(u)$, dependientes del parámetro "u", no varían, asi que, como se ha dicho, es el crecimiento o decrecimiento del parámetro "v" lo que hace variar la dirección del vector $\underline{r}_u = \dot{\underline{D}} + v\,\dot{\underline{d}}$ en tanto el vector $\underline{r}_v = \underline{d}$ se conserva invariable. Consecuentemente, la variación del plano tangente a la superficie en cada punto a lo largo de una generatriz es debida, trivialmente, a la variación de $\underline{r}_u$. Si tomamos como referencia el punto en que la generatriz corta a la directriz $\underline{D}$, el vector $\dot{\underline{D}} + v\,\dot{\underline{d}}$ "gira" para valores **v > 0**, por ejemplo, en uno de los sentidos a partir de este punto, desde la posición de $\dot{\underline{D}}$ (**v = 0**, punto de corte con la directriz) hasta –si se quiere ya introducir el plano asintótico– el valor $v \to \infty$, en el que tiende a la dirección de $\dot{\underline{d}}$. Se simplifica la visualización de esta variación si utilizamos la parametrización $\underline{D}(u) + v\,\underline{d}_1(u)$; en este caso $\dot{\underline{d}}_1$ –que no tiene por qué ser unitario– es normal a $\underline{d}_1$ y se conserva en el plano normal a la generatriz lo que nos proporciona una referencia espacial auxiliar para su representación gráfica. En estas condiciones, la secuencia de la variación puede verse en la figura 06.

En general, los tres pares de vectores: $\dot{\underline{D}}, \underline{d}$; $\dot{\underline{d}}, \underline{d}$; $(\dot{\underline{D}} + v\,\dot{\underline{d}}), \underline{d}$, definen en cada punto de la generatriz tres planos distintos con una recta común que es la propia generatriz. Los dos primeros son límites del tercero entre el punto de intersección de la directriz tomada en la representación y el punto impropio de la recta. Consecuentemente, entre estos límites, las rectas normales a la superficie varían desde la dirección del vector $\dot{\underline{D}} \times \underline{d}$ a la del $\dot{\underline{d}} \times \underline{d}$. La descripción de esta disposición se completará cuando posteriormente introduzcamos el concepto de los puntos centrales de la superficie.



variación del plano tangente a lo largo de una generatriz $(\dot{\underline{D}},\underline{d},\dot{\underline{d}})\neq 0$

fig. 06

§ 4.- Coeficientes de la primera y segunda formas cuadráticas fundamentales. El parámetro de distribución. Clasificación de los puntos de una superficie reglada.

De la superficie $\underline{r}(u, v)=\underline{D}(u)+v\ \underline{d}(u)$, con $\underline{r}_u = \dot{\underline{D}}(u)+v\ \dot{\underline{d}}(u)$ y $\underline{r}_v = \underline{d}(u)$, se obtienen los escalares:

$E = \underline{r}_u \cdot \underline{r}_u =(\dot{\underline{D}}+v\ \dot{\underline{d}})(\dot{\underline{D}}+v\ \dot{\underline{d}})= (\dot{\underline{D}}+v\ \dot{\underline{d}})^2 = |(\dot{\underline{D}}+v\ \dot{\underline{d}})|^2$

$F = \underline{r}_u \cdot \underline{r}_v = (\dot{\underline{D}}+v\ \dot{\underline{d}}).\underline{d} =(\dot{\underline{D}}.\underline{d})+ v\ (\dot{\underline{D}}.\underline{d})$

$G = \underline{r}_v \cdot \underline{r}_v = \underline{d}.\underline{d}=\underline{d}^2 = |\underline{d}|^2$, y con $\underline{r}_{uu} = \ddot{\underline{D}}+v\ \ddot{\underline{d}}$, $\underline{r}_{uv}=\dot{\underline{d}}$, $\underline{r}_{vv} = 0$, obtenemos los:

$$e = \frac{((\ddot{\underline{D}}+v\ddot{\underline{d}}),(\dot{\underline{D}}+v\dot{\underline{d}}),\underline{d})}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{e^*}{\sqrt{EG-F^2}},\qquad f=\frac{(\dot{\underline{d}},(\dot{\underline{D}}+v\dot{\underline{d}}),\underline{d})}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{f^*}{\sqrt{EG-F^2}},\qquad g = 0,$$

de donde se deduce que en las superficies regladas –expresadas en su parametrización lineal en el parámetro "**v**"–, el coeficiente **g** es nulo (si se toma "**u**" como parámetro lineal, trivialmente será **e = 0**). Esto último nos permite obtener un resultado esperado:

$e\,g - f^2 = -f^2 \leq 0$, o bien $e^*\,g^* - f^{*2} = -f^{*2} \leq 0$,

que indica que en las superficies regladas los puntos son no elípticos ni umbilicales. El que los puntos sean parabólicos, hiperbólicos o, eventualmente, planos depende de que el valor **f *** tome valor nulo o distinto de cero. Este escalar puede, sin embargo expresarse en la forma:

$$f^*(u)= (\dot{\underline{d}},(\dot{\underline{D}}+v\ \dot{\underline{d}}),\underline{d}) = (\dot{\underline{d}}\times(\dot{\underline{D}}+v\ \dot{\underline{d}}))\ \underline{d} = (\dot{\underline{d}}\times\dot{\underline{D}})\ \underline{d} =(\dot{\underline{d}},\dot{\underline{D}},\underline{d})=(\dot{\underline{D}},\underline{d},\dot{\underline{d}}),$$

que solo depende del parámetro "**u**". Esta función puede ser excepcionalmente la función nula, en cuyo caso todos los puntos son parabólicos y por lo tanto todas las generatrices lo son de puntos parabólicos, pero el caso más general es que sea una función no nula y en este caso los puntos parabólicos se agrupan a lo largo de generatrices "parabólicas" o "cilíndricas" aisladas en las que los valores de **u** satisfacen **f*(u)= 0**; el resto de las generatrices serán de puntos hiperbólicos. En este sentido, los valores de **f *** distribuyen las generatrices de la superficie reglada, básicamente en dos clases. En cuanto a los puntos planos, deberán encontrarse, naturalmente, sobre las generatrices de puntos parabólicos. En ellas, serán planos los que anulen, además a **e *** que es, en general, una función de ambos parámetros **e*(u, v)**. Las generatrices **f *= 0**, pueden tener puntos planos aislados o ser, en realidad, generatrices todas ellas de puntos planos. En las superficies regladas regulares que consideramos no existen puntos parabólicos ni hiperbólicos aislados, existen superficies donde todas sus generatrices son de puntos parabólicos o superficies de puntos hiperbólicos con generatrices "aisladas" de puntos parabólicos y desde luego, aunque pueda haber puntos planos aislados, no existen puntos umbílicos aislados, lo que supone una importante simplificación de la configuración principal de la superficie. Como ya se ha indicado, nos referiremos indistintamente a las generatrices aisladas de puntos parabólicos como generatrices "cilíndricas" o "parabólicas" de la superficie reglada. Cuando **f *** resulta ser la función nula, trivialmente todas las generatrices serán "cilíndricas", aunque de hecho la superficie pueda ser un cono u otro tipo de superficie que tendremos ocasión de describir posteriormente.

Es conveniente recordar que en los puntos parabólicos, la dirección asintótica – única – coincide con una de las direcciones principales de la superficie. Teniendo en cuenta que las rectas que pasan por un punto parabólico son líneas asintóticas, las generatrices de puntos parabólicos se convierten en líneas de curvatura principal. Las generatrices aisladas de puntos parabólicos en una región donde todas las demás generatrices lo son de puntos hiperbólicos tienen una línea de curvatura principal – y a la vez, asintótica – recta, así que estas generatrices "cilíndricas" tienen una importante vinculación con la forma de las superficies regladas y con su estructura.

A la función escalar $\mathbf{f^*(u) = (\dot{\underline{D}}\ (u), \underline{d}\ (u), \dot{\underline{d}}\ (u))}$ – producto mixto de los tres vectores – que nos permite, entre otras cosas, clasificar las generatrices la denominamos aquí "**parámetro de distribución**" de la superficie reglada. A lo largo de cada generatriz **u=u**, el parámetro de distribución es, trivialmente, un número que no varía. Más tarde veremos como, para simplificar determinadas fórmulas o para dar otra interpretación a determinadas propiedades, puede darse otra definición alternativa al parámetro de distribución.

Resumiendo, para obtener las generatrices de puntos parabólicos ("parabólicas" o "cilíndricas") de una superficie reglada basta obtener los valores del parámetro "**u**" que anulen el parámetro de distribución, o sea, que satisfagan la ecuación $\mathbf{f^*(u)= 0}$. Después podemos comprobar qué valores de "**v**", además, anulan $\mathbf{e^*(u, v) = 0}$, lo que nos permite determinar sobre ellas los posibles puntos planos de la superficie.

Consideremos, por ejemplo, el hiperboloide:

$\underline{\mathbf{r}}\,\mathbf{(u, v) = \{-sen\ u + v\ cos\ u,\ cos\ u + v\ sen\ u,\ v\} = (-sen\ u,\ cos\ u,\ 0) + v\ \{cos\ u,\ sen\ u,\ 1\}}$,

por derivación, se obtienen los vectores:

$\underline{\mathbf{r}}_u \mathbf{= \{-cos\ u - v\ sen\ u,\ -sen\ u + v\ cos\ u,\ 0\}}$, $\underline{\mathbf{r}}_v \mathbf{= \underline{d} = \{cos\ u,\ sen\ u,\ 1\}}$, $\underline{\mathbf{r}}_{uv} \mathbf{= \{-sen\ u,\ cos\ u,\ 0\}}$,

y el parámetro de distribución resultará ser

$$\mathbf{f^*} = \begin{vmatrix} -sen\,u & cos\,u & 0 \\ -cos\,u - v\,sen\,u & -sen\,u + v\,cos\,u & 0 \\ cos\,u & sen\,u & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{1};$$

así que no existiendo valores de "**u**" que anulen esta función, no existen generatrices de puntos parabólicos en la superficie. Todas las generatrices son rectas de puntos hiperbólicos.

Si consideramos ahora el conoide $\mathbf{(v, u, v\ cos\ u) = (0, u, 0) + v\ \{1, 0, cos\ u\}}$, podemos obtener los vectores:

$\underline{\mathbf{r}}_u \mathbf{= \{0, 1, -v\ sen\ u\}}$, $\underline{\mathbf{r}}_v \mathbf{= \underline{d} = \{1, 0, cos\ u\}}$, $\underline{\mathbf{r}}_{uu} \mathbf{= \{0, 0, -v\ cos\ u\}}$, $\underline{\mathbf{r}}_{uv} \mathbf{= \{0, 0, -sen\ u\}}$,

y con ellos, las funciones:

$$\mathbf{f^*(u)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -sen\,u \\ 0 & 1 & -v\,sen\,u \\ 1 & 0 & cos\,u \end{vmatrix} = \mathbf{sen\ u}, \qquad \mathbf{e^*(u, v)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -v\,cos\,u \\ 0 & 1 & -v\,sen\,u \\ 1 & 0 & cos\,u \end{vmatrix} = \mathbf{v\ cos\ u},$$

de donde se deduce que existen diferentes generatrices de puntos parabólicos correspondientes a $\mathbf{u = 0, u = \pi}$... etc, que pueden estar contenidas o no en el fragmento considerado según el rango de variación del parámetro "**u**" que lo delimita. Si, por ejemplo, el fragmento de superficie se determina en $\mathbf{u \in [0, \pi], v \in [-1, 1]}$, existirán dos generatrices aisladas de puntos parabólicos correspondientes a los valores $\mathbf{u = 0}$ y $\mathbf{u = \pi}$, o sea, las generatrices:

$\mathbf{(0, 0, 0) + v\ \{1, 0, 1\}}$ y $\mathbf{(0, \pi, 0) + v\ \{1, 0, -1\}}$.

Ahora bien, sobre las generatrices de puntos parabólicos encontramos que para valores $\mathbf{v = 0}$, los puntos así definidos son planos $\mathbf{e^* = f^* = 0}$, por lo que deducimos que sobre cada una de las generatrices de puntos parabólicos existe un solo punto plano, intersección de las mismas con la línea $\mathbf{v = 0}$, que es la recta $\mathbf{(0, u, 0)}$. Este eje **OY** contenido en la superficie – que no es una generatriz – es, por lo tanto, una recta de puntos hiperbólicos con un número finito de puntos planos aislados según el rango de variación de los parámetros del fragmento considerado. En la figura 07 se representa esta superficie en el rango $\mathbf{u \in [0, 2\pi]}$, $\mathbf{v \in [-1, 1]}$, resaltando las generatrices de puntos parabólicos que son tres (dos en los bordes y una interior), el eje **OY** contenido en la superficie y los puntos planos intersección de esta recta con las generatrices.

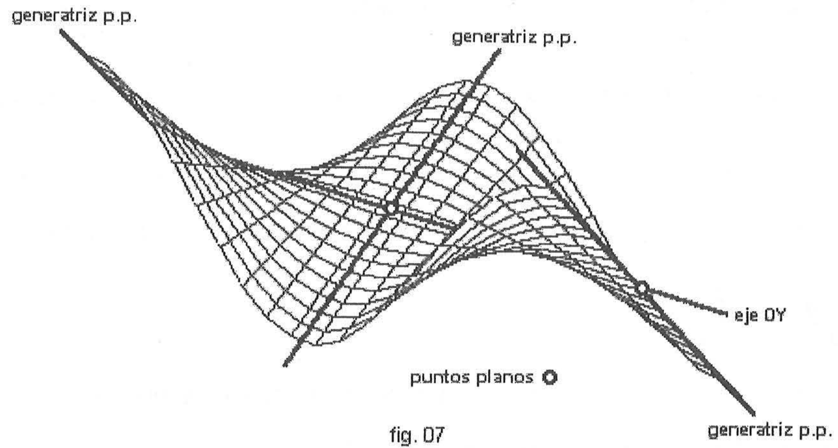


fig. 07

Finalmente consideraremos la superficie: $(\mathbf{u}, \mathbf{v}\,\mathbf{u}^3, 1-\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, 0, 1)+\mathbf{v}\ \{0, \mathbf{u}^3, -1\}$.

En este caso obtenemos los vectores: $\underline{r}_u = \{1, 3\,u^2\,v, 0\}$, $\underline{r}_v = \underline{d} = \{0, u^3, -1\}$, $\underline{r}_{uu} = \{0, 6\,u\,v, 0\}$, $\underline{r}_{uv} = \{0, 3\,u^2, 0\}$,

y las funciones: $f^*(u) = \begin{vmatrix} 0 & 3\,u^2 & 0 \\ 1 & 3\,u^2\,v & 0 \\ 0 & u^3 & -1 \end{vmatrix} = 3\,u^2$, $\quad e^*(u, v) = \begin{vmatrix} 0 & 6\,u\,v & 0 \\ 1 & 3\,u^2\,v & 0 \\ 0 & u^3 & -1 \end{vmatrix} = 6\,u\,v.$

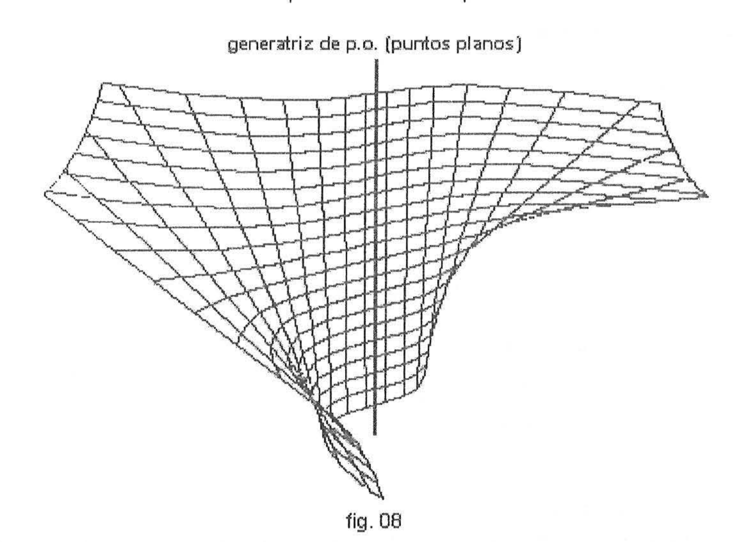


fig. 08

La única generatriz de puntos parabólicos es, en principio, la $\mathbf{u} = 0$, es decir la recta $(0, 0, 1) + v\ \{0, 0, -1\}$, en el supuesto de que el dominio cubra este valor del parámetro **u**, sin embargo este valor anula simultáneamente la función $\mathbf{e}^*(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, así que $\mathbf{u} = 0$ es una generatriz aislada de puntos planos –o, si se quiere, una generatriz “plana”–. El resto de las generatrices lo son de puntos hiperbólicos. En la figura 08 se representa este conoide, en $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, $v \in [-1, 1]$, señalando su única generatriz de puntos planos.

§ 5.- Las trayectorias ortogonales de las generatrices.

Uno de los problemas de medida –y por lo tanto gobernado por los coeficiente **E, F, G** de la superficie– que nos puede resultar útil conocer es el cálculo de las trayectorias ortogonales de la familia de rectas generatrices de una superficie reglada.

Sabemos que sobre cualquier superficie parametrizada $\underline{r}\,(u, v)$, el ángulo "α" que forman dos curvas, definidas cada una de ellas respecto a cualquier parámetro mediante las ecuaciones : $u = u_1, v = v_1$ y $u = u_2, v = v_2$,
en su punto de intersección–determinado por una relación entre sus parámetros– viene medido por la expresión:

$$\cos\alpha = \frac{E\,\dot{u}_1\dot{v}_1 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\,\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{E\,\dot{u}_1^2 + 2F\,\dot{u}_1\dot{v}_1 + G\,\dot{v}_1^2}\ \sqrt{E\,\dot{u}_2^2 + 2F\,\dot{u}_2\dot{v}_2 + G\,\dot{v}_2^2}}\ .$$

Cuando disponemos de la familia de curvas coordenadas $u_1 = cte$ y deseamos obtener sus trayectorias bajo ángulo "α" descritas sobre la superficie en la forma genérica $v_2 = v\,(u_2 = u)$, la fórmula anterior con

$\dot{u}_1 = 0$, $\dot{v}_1 = 1$ y $\dot{u}_2 = 1$, $\dot{v}_2 = \dot{v}(u)$, se convierte en la ecuación diferencial: $\cos\alpha = \dfrac{F + G\,\dot{v}}{\sqrt{G}\,\sqrt{E + 2F\,\dot{v} + G\,\dot{v}^2}}$, cuya integración nos puede permitir la obtención de $v = v\,(u, C)$, expresión que determina sobre la superficie las curvas buscadas y que pueden ser representadas en función del parámetro "u" de la superficie por $\underline{r}\,(u, v\,(u, C))$. Esta ecuación puede ser no resoluble por los métodos elementales tradicionales.

Cuando se trata de hallar las trayectorias ortogonales ($\alpha = \pi/2$), esta última expresión se simplifica, quedando:

$$F + G\,\dot{v}(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{v}(u) = -\frac{F}{G},$$

en la que se comprueba que, cuando **F = 0**, las curvas buscadas se convierten, trivialmente, en las curvas **v = cte** (las curvas coordenadas son ortogonales).

En una superficie reglada en la forma $\underline{\mathbf{r}}(u, v) = \underline{\mathbf{D}}(u) + v\,\underline{\mathbf{d}}(u)$, las curvas **u =cte** son sus generatrices y teniendo en cuenta las expresiones $F = (\dot{\underline{D}}.\underline{d}) + v\,(\dot{\underline{d}}.\underline{d})$ y $G = \underline{d}.\underline{d}$ obtenidas anteriormente, la ecuación diferencial que nos debe permitir obtener sus trayectorias ortogonales se convierte en la:

$$\dot{v}(u) = -\frac{(\dot{\underline{D}}.\underline{d}) + v(\dot{\underline{d}}.\underline{d})}{\underline{d}.\underline{d}} = -\frac{\dot{\underline{D}}.\underline{d}}{\underline{d}.\underline{d}} - v\,\frac{\dot{\underline{d}}.\underline{d}}{\underline{d}.\underline{d}}, \tag{2a}$$

esta expresión se simplifica notablemente si se trabaja con la parametrización $\underline{D}(u) + v\,\underline{d}_1(u)$, ya que en este caso $\dot{\underline{d}}_1.\underline{d}_1 = 0$, $\underline{d}_1.\underline{d}_1 = 1$, ($\underline{d}_1$ unitario, $\dot{\underline{d}}_1$ es normal a $\underline{d}_1$), en cuyo caso la ecuación anterior quedará:

$$\dot{v}(u) = -\dot{\underline{D}}.\underline{d}_1 \tag{2.b}$$

La ecuación $_{(2.a)}$ nos permite calcular, por ejemplo, estas trayectorias tanto en el hiperboloide:
(−sen u + v cos u, cos u +v sen u, v) = (−sen u, cos u, 0) +v {cos u, sen u, 1},
como en el conoide:
(v, u, v cos u) = (0, u, 0) + v {1, 0, cos u}.
En el primer caso, obtenemos las funciones vectoriales:

$\dot{\underline{D}}$ = {−cos u, −sen u, 0}, $\underline{d}$ = {cos u, sen u, 1}, $\dot{\underline{d}}$ = {−sen u, cos u, 0},

y los productos escalares: $\dot{\underline{D}}.\underline{d} = -1$, $\underline{d}.\underline{d} = 2$, $\dot{\underline{d}}.\underline{d} = 0$,

así que la ecuación $_{(2.a)}$ se convierte en la $\dot{v} = \frac{1}{2}$, y de aquí $v = \frac{1}{2}u + C$,

por lo que la familia de curvas ortogonales a las generatrices pueden ser definidas por la parametrización:

$$(-\text{sen } u + (\tfrac{1}{2}u + C)\cos u,\ \cos u + (\tfrac{1}{2}u + C)\,\text{sen } u,\ \tfrac{1}{2}u + C).$$

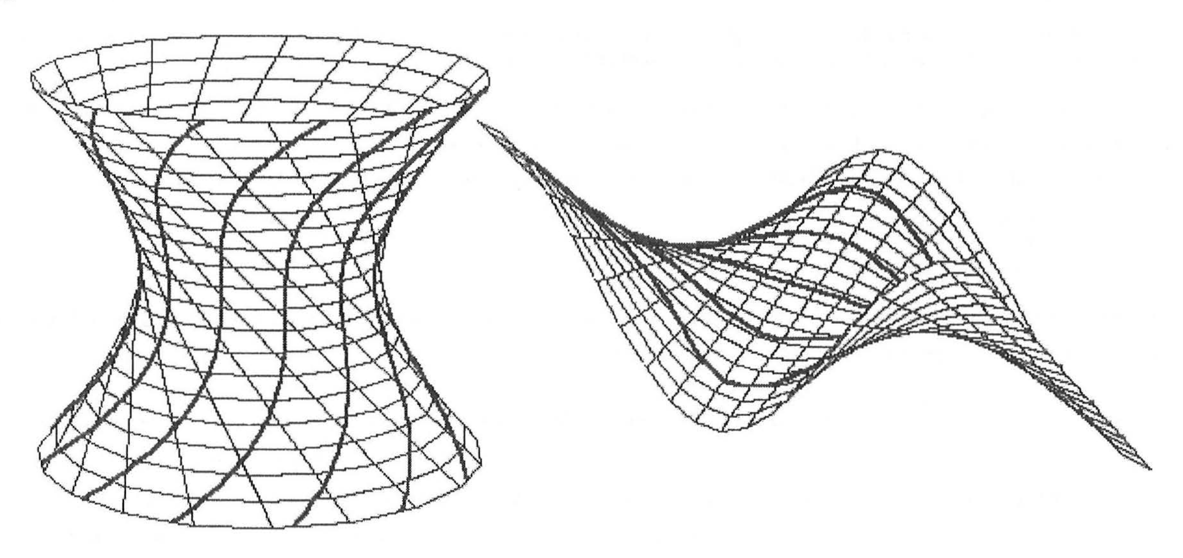
En el caso del conoide se obtienen los vectores: $\dot{\underline{D}}$ = {0, 1, 0}, $\underline{d}$ = {1, 0, cos u}, $\dot{\underline{d}}$ = {0, 0, −sen u},

y los productos escalares: $\dot{\underline{D}}.\underline{d} = 0$, $\underline{d}.\underline{d} = 1 + \cos^2 u$, $\dot{\underline{d}}.\underline{d} = -\text{sen } u \cos u$.

La ecuación se convierte ahora en la $\dot{v} = v\dfrac{\text{sen } u \cos u}{1 + \cos^2 u} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial v}{v} = \dfrac{\text{sen } u \cos u}{1 + \cos^2 u}\,\partial u$,

y el resultado de su integración puede expresarse en la forma $v = C\sqrt{1 + \cos^2 u}$,

así que estas curvas podrán representarse por $(C\sqrt{1 + \cos^2 u},\ u,\ C\sqrt{1 + \cos^2 u}\ \cos u)$.
Ambos casos – hiperboloide y conoide recto– se representan en la figura 09, en la que se incluyen algunas curvas de esta familia ortogonal a las generatrices.



§ 6.- Primera clasificación de las superficies regladas: superficies desarrollables y alabeadas.

El parámetro de distribución **f *(u)** permite distinguir dos grandes grupos de superficies regladas; aquellas en que **f *(u) = 0** (para todo valor del parámetro "u", es decir, la función nula) y aquellas en que, como hemos visto, no siendo nula la función, pueden existir algunos valores para los cuales se anula, que son los que nos determinan las generatrices "parabólicas" y, eventualmente, los puntos planos. Puesto que $\mathbf{f^*(u)=(\dot{\underline{D}}, \underline{d}, \dot{\underline{d}})}$, esta clasificación puede presentarse directamente en la forma:

A).- Superficies en las que $(\dot{\underline{D}}, \underline{d}, \dot{\underline{d}}) = 0$ que denominamos **desarrollables** (superficies "**de curvatura simple**" o superficies "**de curvatura nula**", denominación esta última que hace referencia a la curvatura total K_T de **Gauss**).

B).- Superficies en las que $(\dot{\underline{D}}, \underline{d}, \dot{\underline{d}}) \neq 0$ que serán las **no desarrollables** o "**alabeadas**" ("**anticlásticas**" o superficies "**de curvatura negativa**" haciendo alusión a la K_T).

Puesto que $\underline{d}(u) \neq 0$, las superficies desarrollables serán consecuencia a su vez de otros tres posibles casos:

A_1).- Aquellas superficies en las que $\dot{\underline{D}}(u) = 0$, ($\dot{\underline{D}}(u)$ es la función nula)

Si $\dot{\underline{D}}(u) = 0$, $\underline{D} = $ **cte**, la directriz se reduce a un punto $\underline{D} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $a_i \in \Re$. Todas las generatrices que se apoyan en la directriz, pasan por el punto $P \equiv (a_1, a_2, a_3)$. La superficie es un **cono** de vértice **P**, que se presenta descrito por la parametrización $(a_1, a_2, a_3) + v\ \underline{d}(u)$.

A_2).- Aquellas superficies en las que $\dot{\underline{d}}(u) = 0$, ($\dot{\underline{d}}(u)$ es la función nula)

Si $\dot{\underline{d}}(u) = 0$, $\underline{d} = $ **cte**, la dirección de las generatrices es un vector fijo de $\Re^3$: $\underline{d} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_i \in \Re$. Todas las generatrices se apoyan en la directriz y son paralelas a la dirección $\underline{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. La superficie es un **cilindro** que se presenta descrito por la parametrización $\underline{D}(u) + v\ \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

A_3).- Aquellas en que no siendo nulo el vector $\dot{\underline{D}}(u)$ ni $\dot{\underline{d}}(u)$, son, en todos los puntos, coplanarios con $\underline{d}(u)$. Este caso incluye a su vez diferentes posibilidades que posteriormente describiremos.

Por el momento nos basta con saber que los conos y los cilindros son superficies desarrollables. Más tarde tendremos ocasión de interpretar esta nomenclatura y conocer las características de ambos tipos y también de los tres casos en los que hemos subdividido las desarrollables. Se comprende ahora que la variación del plano tangente –o de la normal– a la superficie a lo largo de una generatriz visto en el § 3 –que describíamos como el caso más general, en el que $(\dot{\underline{D}}, \underline{d}, \dot{\underline{d}}) \neq 0$, se corresponde con el de las superficies no desarrollables o alabeadas.

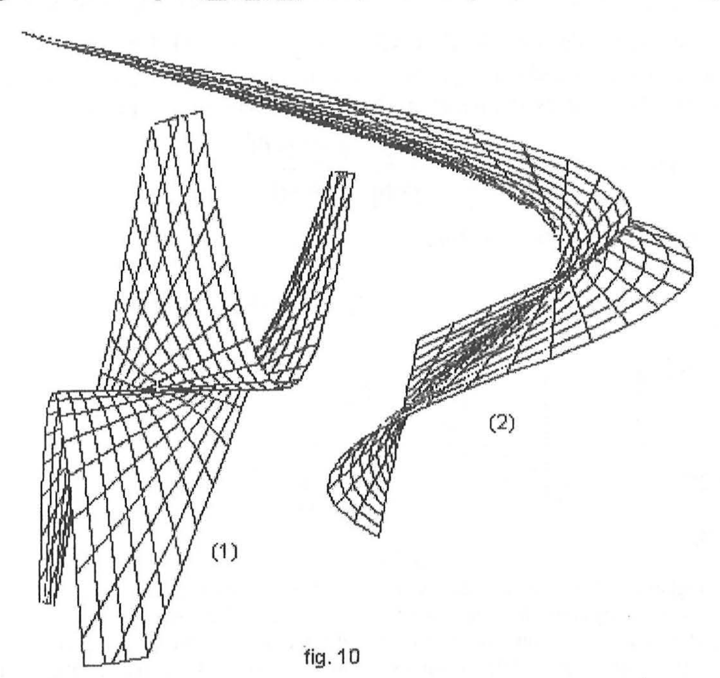


fig. 10

Así, el hiperboloide
(−sen u + v cos u, cos u +v sen u, v) = (−sen u, cos u, 0) +v {cos u, sen u, 1},
y los dos conoides:
(v, u, v cos u) = (0, u, 0) +v {1, 0, cos u},
$\mathbf{(u, v\,u^3, 1-v) = (u, 0, 1) + v\ \{0, u^3, -1\}}$,
son superficies no desarrollables o alabeadas ya que el producto mixto $(\dot{\underline{D}}, \underline{d}, \dot{\underline{d}})$ en los tres casos es no nulo:

$$\begin{vmatrix} -\cos u & -\operatorname{sen} u & 0 \\ \cos u & \operatorname{sen} u & 1 \\ -\operatorname{sen} u & \cos u & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cos u \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen} u \end{vmatrix} = \operatorname{sen} u, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u^3 & -1 \\ 0 & 3u^2 & 0 \end{vmatrix} = 3\,u^2.$$

En tanto las superficies:

$(2u+v, u^2+2uv, 1+3u^2v)^{(1)} = (2u, u^2, 1) + v\{1, 2u, 3u^2\}$,

$((u+v)\cos u - uv \operatorname{sen} u, (u+v)\operatorname{sen} u + uv\cos u, u+v)^{(2)} = (u\cos u, u \operatorname{sen} u, u) + v\{\cos u - u\operatorname{sen} u, \operatorname{sen} u + u\cos u, 1\}$,

son desarrollables ya que anulan el producto $(\underline{\dot{D}}, \underline{d}, \underline{\dot{d}})$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2u & 0 \\ 1 & 2u & 3u^2 \\ 0 & 2 & 6u \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \cos u - u\operatorname{sen} u & \operatorname{sen} u + u\cos u & 1 \\ \cos u - u\operatorname{sen} u & \operatorname{sen} u + u\cos u & 1 \\ -2\operatorname{sen} u - u\cos u & 2\cos u - u\operatorname{sen} u & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Estas dos últimas $^{(1)}$ y $^{(2)}$ se representan en la figura 10 de manera que puedan distinguirse sus "dos hojas", tal y como se describirá posteriormente.

§ 7.- Los puntos centrales. Lugares geométricos asociados a los puntos centrales de una superficie reglada.

Entre los problemas elementales de la geometría euclidiana en $\Re^3$ nos interesa destacar ahora el de la determinación de los puntos centrales. Recordamos que se denomina punto central de una recta **r** inducido por un punto **P** fuera de ella, al punto de **r** tal que su distancia a **P** es mínima. Para determinar este punto central **C** sobre la recta, bastará obtener la intersección de esta recta con un plano que conteniendo al punto **P** es normal a ella (figura 11(a)). La distancia mínima del punto a la recta será ahora la distancia entre éste y **C** que, como se sabe, puede obtenerse directamente sin pasar por la determinación del propio punto central.

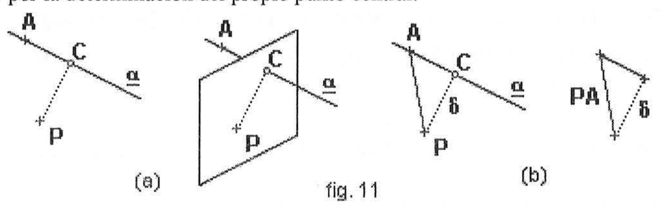


fig. 11

Así, si disponemos de la recta **r** definida por A (a_1, a_2, a_3), $\underline{\alpha}=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ y el punto **P** (p_1, p_2, p_3), el punto central inducido sobre la recta será la intersección del plano normal a **r** por el punto **P** de ecuación:

$\alpha_1(x-p_1)+\alpha_2(y-p_2)+\alpha_3(z-p_3)=0$, con la propia recta $\frac{x-a_1}{\alpha_1}=\frac{y-a_2}{\alpha_2}=\frac{z-a_3}{\alpha_3}$, y para su cálculo, bastará escribir la recta en su forma paramétrica y resolver el valor del parámetro entre ambas ecuaciones. Como se ha dicho, la distancia mínima entre el punto y la recta no necesita del cálculo previo del punto central y puede ser hallada independientemente, (figura11(b)), utilizando, si se quiere, la fórmula elemental:

$\delta = \underline{PA}\ \operatorname{sen}(\underline{PA}, \underline{\alpha}) = |\underline{PA}\times\underline{\alpha_1}|$ siendo $\underline{\alpha_1}$ el vector unitario de $\underline{\alpha}$.

Análogamente, considerando dos rectas r_1 y r_2 no coplanarias, cada una de ellas induce un punto central sobre la otra, de manera que entre ambos puntos centrales la distancia entre las rectas es mínima. Como en el caso anterior, esta distancia puede ser hallada de forma independiente sin pasar por el cálculo de los puntos centrales. La determinación de los puntos centrales inducidos entre estas dos rectas que se cruzan requiere un calculo algo más laborioso. El método más seguro consiste en establecerlos como intersección de recta y plano. Sean las rectas definidas por r_1: A (a_1, a_2, a_3), $\underline{\alpha}=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ y r_2: B (b_1, b_2, b_3), $\underline{\beta}=\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. La intersección del plano A, $\underline{\alpha}$, $\underline{\alpha}\times\underline{\beta}$ con la recta B, $\underline{\beta}$ nos dará el punto central sobre r_2 y la intersección del plano B, $\underline{\beta}$, $\underline{\alpha}\times\underline{\beta}$ con la A, $\underline{\alpha}$ nos dará el punto central de esta última (figura 12 (a)). Ambos planos así construidos tienen como intersección la perpendicular común a r_1 y r_2, que es una recta única. La distancia entre los puntos centrales será la distancia mínima entre ambas rectas, que puede ser obtenida directamente –independiente del cálculo de los puntos centrales– mediante la fórmula:

$$\delta = |\underline{AB}\ \cos(\underline{AB}, \underline{\alpha}\times\underline{\beta})| = \left|\underline{AB}\,\frac{\underline{\alpha}\times\underline{\beta}}{|\underline{\alpha}\times\underline{\beta}|}\right| = \frac{|(\underline{AB}, \underline{\alpha}, \underline{\beta})|}{|\underline{\alpha}\times\underline{\beta}|}$$

donde $(\underline{AB}, \underline{\alpha}, \underline{\beta})$ es el producto mixto de los vectores $\underline{AB}$, $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ (figura 12 (b)).

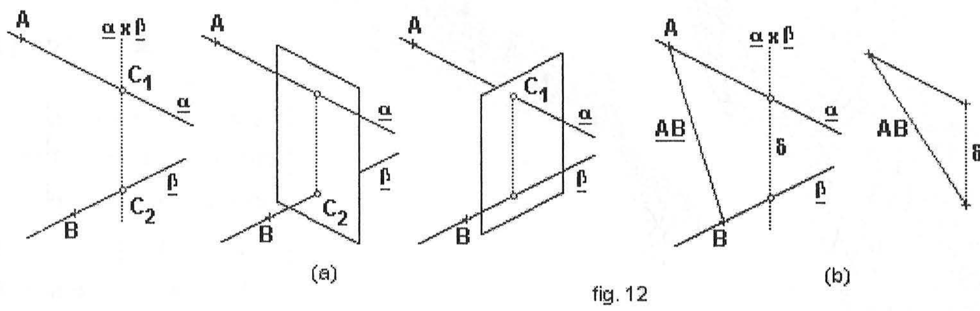


fig. 12

Teniendo en cuenta que la superficie reglada es un conjunto de rectas en $\Re^3$, podemos imaginar ahora diferentes lugares geométricos sobre la misma, asociados a los puntos centrales sobre las generatrices, tanto los centrales entre punto y recta como en los inducidos entre recta y recta. Se puede obtener, por ejemplo, el conjunto de puntos centrales inducidos sobre las generatrices por un punto cualquiera de la superficie; este lugar geométrico será, simplemente, el de los puntos de intersección de las perpendiculares a las distintas generatrices, trazadas desde el punto elegido, con las propias generatrices.

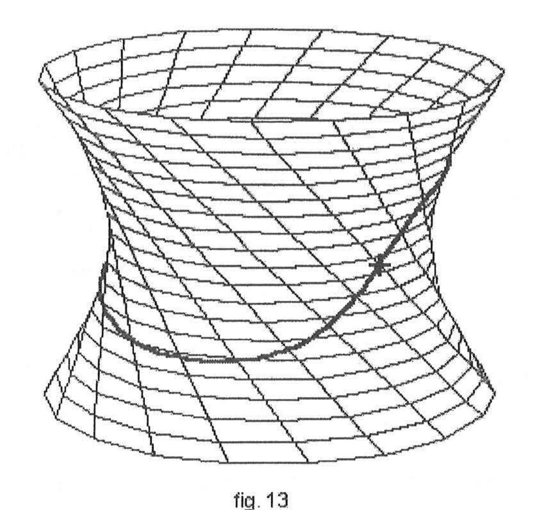


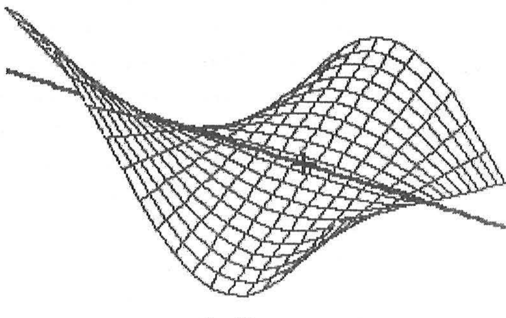
fig. 13

Así, sobre el hiperboloide: **($-$sen u +v cos u, cos u +v sen u, v)** podemos obtener, por ejemplo, los puntos centrales inducidos en cualquier generatriz desde cualquiera de los puntos de la superficie.
Elegido el punto **(0, 1, 0)** $\Leftrightarrow$ **u = 0, v = 0**, la intersección del plano
cos u (x$-$0)+ sen u (y$-$1)+(z$-$0) = 0 $\Rightarrow$ **cos u x + sen u y + z $-$ sen u = 0**
con cada generatriz:
x = $-$sen u +v cos u   y = cos u +v sen u   z = v,
nos permite obtener la ecuación:
cos u ($-$sen u +v cos u) + sen u (cos u +v sen u) + v $-$sen u = 0 y de aquí:
2 v $-$sen u = 0, de donde obtenemos el valor
$v = \frac{1}{2}$ **sen u**, que llevado a la superficie determina la curva:

$$(-\text{sen } u + \frac{1}{2}\text{ sen } u \cos u,\ \cos u + \frac{1}{2}\text{ sen } u \text{ sen } u,\ \frac{1}{2}\text{sen } u),$$

que, trivialmente, contiene al punto **(0, 1, 0)**. Esta curva se representa en la figura 13.

Elegimos ahora el punto **(0, π, 0)** $\Leftrightarrow$ **u = π, v = 0** , del conoide **(v, u, v cos u) = (0, u, 0) +v {1, 0, cos u}**. De la intersección del plano
(x$-$0) + cos u (z$-$0) = 0 $\Rightarrow$ **x + cos u z = 0**
con las generatrices
x = v,   y = u,   z = v cos u,
obtenemos la ecuación **v +v $\cos^2$ u = 0** $\Rightarrow$ **v (1+ $\cos^2$ u) = 0,**
de donde necesariamente v = **0**, así que este lugar geométrico resulta ser una recta –el eje OY– que coincide con la directriz de la superficie **(0, u, 0)** y que contiene al propio punto **(0, 1, 0)**. Se llega al mismo resultado sea cual sea el punto elegido de este eje, lo que se explica porque esta recta contenida en la superficie –que no es una generatriz–, es perpendicular a todas las generatrices de la superficie (figura 14).



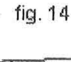


fig. 14

Podemos imaginar ahora otras curvas sobre cualquier superficie reglada tal como el lugar geométrico de los puntos centrales inducidos por cualquier generatriz sobre todas las demás – independientemente de que los inducidos por las demás sobre ella misma puedan variar –.

Elegimos, por ejemplo sobre el hiperboloide la generatriz **u = 0**,o sea la recta **(0, 1, 0) +v {1, 0, 1}**.
La perpendicular común entre esta generatriz y cualquier otra tendrá como dirección:

$$\begin{vmatrix} & & \\ 1 & 0 & 1 \\ \cos u & \text{sen } u & 1 \end{vmatrix} = \{-\text{sen } u,\ \cos u - 1,\ \text{sen } u\},$$

y la intersección del plano

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -\text{sen } u & \cos u - 1 & \text{sen } u \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ **(1$-$cos u) x $-$2 sen u y +(cos u $-$1) z +2 sen u = 0**
con cualquiera de las generatrices:
x = $-$sen u + v cos u   y = cos u +v sen u   z = v,
nos permite escribir la ecuación:
(1$-$cos u) ($-$sen u + v cos u) $-$2 sen u (cos u +v sen u) +(cos u $-$1)v+2sen u=0,

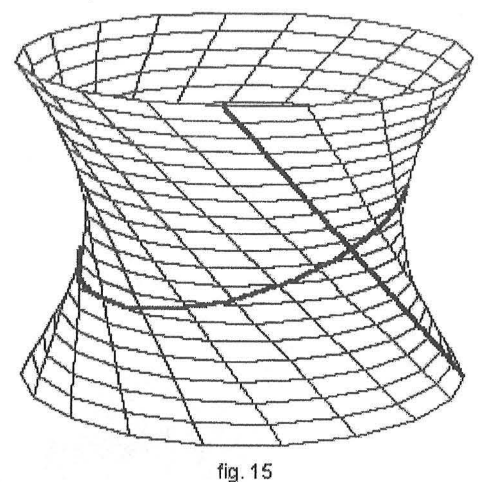
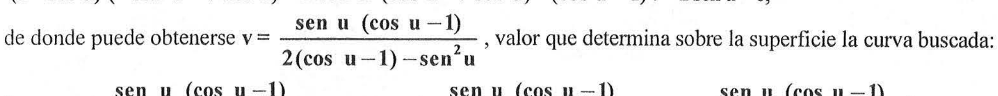


fig. 15

de donde puede obtenerse $v = \dfrac{\text{sen } u\ (\cos u - 1)}{2(\cos u - 1) - \text{sen}^2 u}$, valor que determina sobre la superficie la curva buscada:



$$(-\text{sen } u + \frac{\text{sen } u\ (\cos u - 1)}{2(\cos u - 1) - \text{sen}^2 u} \cos u,\ \cos u + \frac{\text{sen } u\ (\cos u - 1)}{2(\cos u - 1) - \text{sen}^2 u} \text{ sen } u,\ \frac{\text{sen } u\ (\cos u - 1)}{2(\cos u - 1) - \text{sen}^2 u}).$$

Esta curva, junto a la generatriz elegida, se muestra en la figura 15.

En el conoide **(v, u, v cos u) = (0, u, 0) +v {1, 0, cos u}** tomamos ahora la generatriz **u = π**, o sea, la recta: **(0, π, 0) +v {1, 0, $-$1}**.

La perpendicular común entre esta generatriz y todas las demás tendrá la dirección: $\begin{vmatrix} & & \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \cos u \end{vmatrix}$ = **{0, $-$(cos u+1), 0},**

y la intersección del plano $\begin{vmatrix} x-0 & y-\pi & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -(\cos u + 1) & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ **(1+ cos u) (x $-$ z) = 0** $\Rightarrow$ **x $-$ z = 0**

con las generatrices $x = v$, $y = u$, $z = v \cos u$, nos determina la ecuación $v\,(1-\cos u) = 0$, de la que se deduce necesariamente que $v = 0$, asi que la curva buscada es la $(0, u, 0)$ – eje **OY**, directriz del conoide –. En la figura 16 podemos contemplar la generatriz elegida y la línea de puntos centrales obtenida. Este mismo resultado se alcanza sea cual sea la generatriz tomada, es decir: el lugar geométrico de los puntos centrales que induce cualquier generatriz sobre todas las demás es siempre el mismo eje **OY**. La razón es la ofrecida anteriormente: esta recta, contenida en la superficie, es perpendicular a todas las generatrices por lo que se convierte, trivialmente, en perpendicular común de todas ellas. Teniendo en cuenta el lugar geométrico obtenido anteriormente sobre este mismo conoide, se observa que la disposición de las generatrices en esta superficie en lo referente a los puntos centrales resulta muy particular. Esta disposición puede ser compartida por superficies regladas muy notorias como el helicoide recto o incluso determinados paraboloides hiperbólicos, entre otras. A estos casos nos referiremos también más adelante.

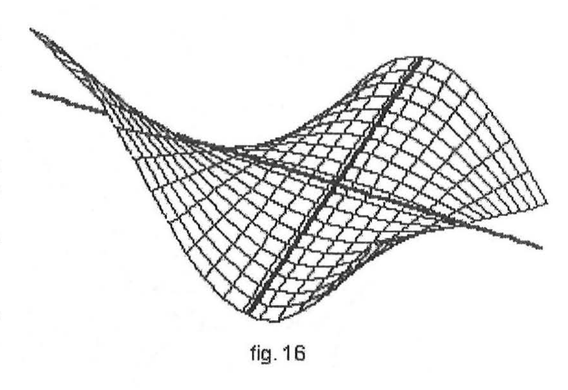


fig. 16

§ 8.- Acerca de la línea de estricción como lugar de puntos centrales de una superficie reglada.

Cuando consideramos una superficie reglada que no sea un cilindro, $\dot{\underline{\mathbf{D}}}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$, ocurre que los puntos centrales inducidos entre cualquier par de generatrices tienden a confundirse en uno solo cuando las generatrices tomadas se aproximan de forma infinitesimal. Se comprende que este proceso está vinculado a la existencia de una posición límite de la perpendicular común – que es una recta única – entre dos generatrices muy próximas entre sí. El resultado es, como veremos, que en este sentido sobre cada generatriz se induce un punto central y el conjunto de estos puntos centrales describen sobre la superficie una curva que denominamos **línea de estricción**. Estos puntos límite entre dos generatrices suficientemente próximas son los que denominamos **puntos centrales de la superficie**. A ellos nos referiremos a partir de ahora cuando se hable simplemente de "puntos centrales", independientemente de los lugares geométricos vistos anteriormente con los que este conjunto de puntos no coinciden salvo en casos muy particulares aunque, no obstante, puedan relacionarse con ellos desde otros puntos de vista que aquí no nos interesa destacar. Matemáticamente la línea de estricción sobre la superficie está vinculada a un problema de mínimo – resulta ser una directriz mínima, de ahí su nombre: estricción, constricción, encogimiento –, pero nos parece más interesante destacar que el punto central de cada generatriz la dividirá en dos semirrectas –o en dos segmentos considerando un fragmento de superficie – en las que, a igual distancia de su punto central, la superficie tiene algunas destacadas características comunes y, consecuentemente, la línea de estricción divide a la superficie internamente en dos fragmentos, o dos "hojas", con ciertas propiedades comunes a ambos lados de la misma en dirección de sus generatrices y la superficie se expande a partir de ella por ambos lados. En algunos casos los índices de la superficie referentes a los problemas de medida y de forma presentan muchas similitudes en cada fragmento y en otros casos, muy notorios, son directamente idénticos y ésta se convierte en una línea de cierta "simetría" –o "antimetría"– de la superficie. Estas circunstancias se hacen visibles en los conoides rectos (figura 17a) o en los helicoides cerrados y, en menor medida, también en los conoides oblicuos (figura 17b). Podemos encontrar también otros casos de "simetría" más compleja (figura 17c).

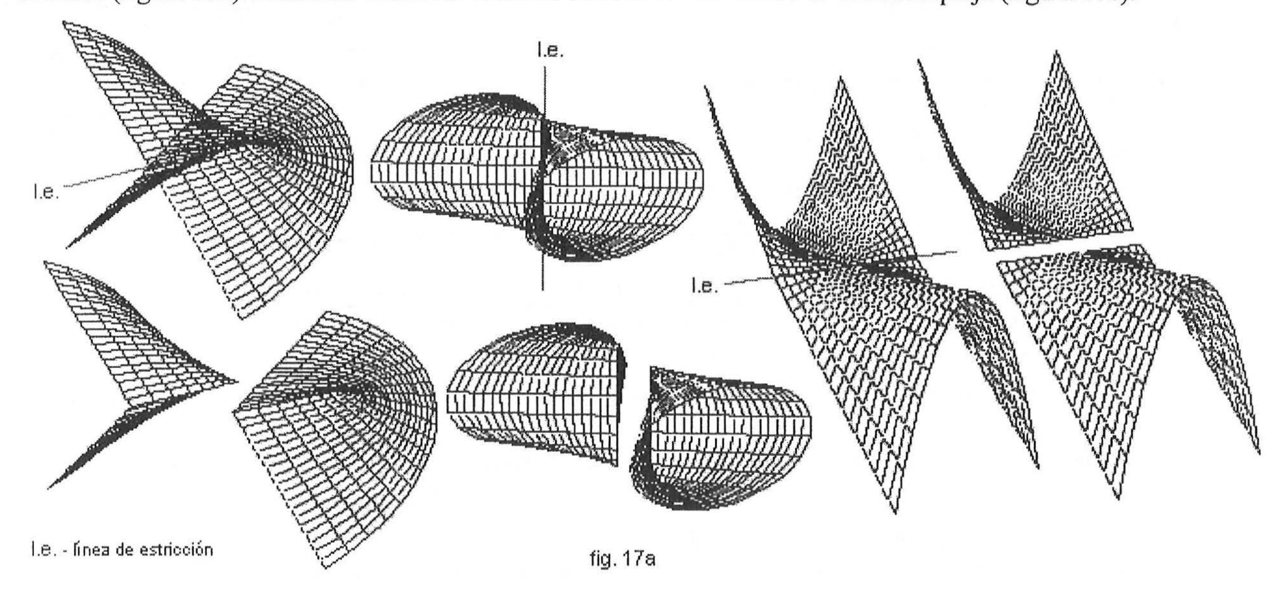


fig. 17a

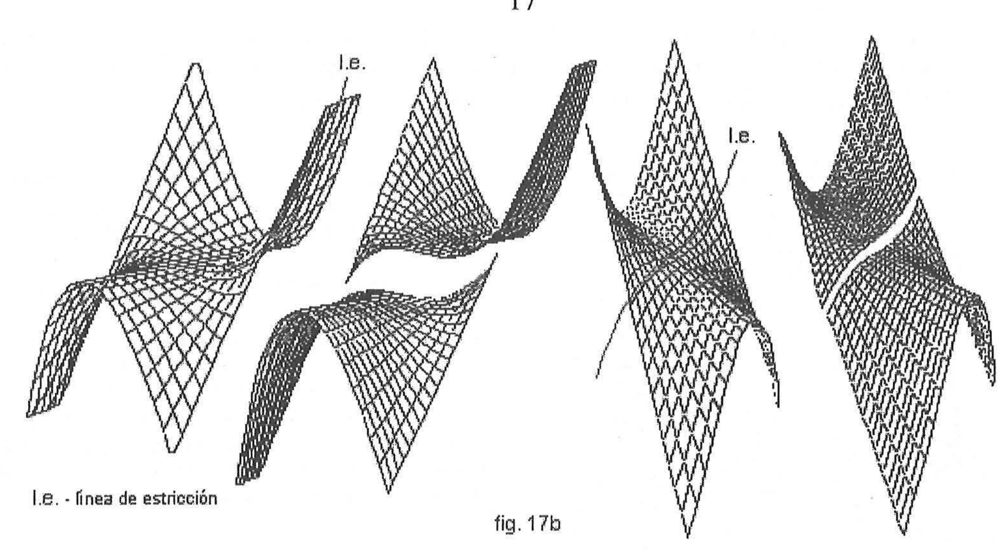


fig. 17b

La separación en dos fragmentos se hará evidente en las superficies desarrollables –en las que esta línea es verdaderamente determinante– ya que aquí la línea de estricción se convierte en una "arista viva" –de puntos singulares– y la superficie se "dobla" manifiestamente en dos hojas. En las superficies regladas alabeadas, sin embargo no se suele mostrar visiblemente salvo, a lo sumo, en determinados puntos y lo normal es que pase desapercibida entre el tejido de curvas arbitrarias de la superficie. En algunas superficies se manifiesta cuando es una recta como en los conoides rectos o en los helicoides cerrados y en otras regladas de revolución coincide con su círculo de garganta; esto ocurre, por ejemplo, en el hiperboloide alabeado. En la figura 17d se representan los fragmentos en que la línea de estricción divide al hiperboloide y al conoide.

l.e.

l.e. - línea de estricción

fig. 17c

l.e.

l.e.

l.e. - línea de estricción

fig. 17d

La línea de estricción de la superficie está vinculada a la misma de forma intrínseca, o sea, que es propia de cada superficie reglada independientemente de su representación. Esta circunstancia nos va a permitir distinguir y clasificar, por ejemplo, las superficies desarrollables y también contemplar algunas superficies alabeadas desde un punto de vista intrínseco. Los cilindros, trivialmente, carecen de línea de estricción real porque sus generatrices son paralelas y este proceso de aproximación entre dos generatrices próximas queda indeterminado. En los conos, la línea de estricción, trivialmente, se va a reducir a un punto, su vértice, que es punto común de todas ellas. En los demás casos, dispuesto el procedimiento para calcular la línea de estricción, los puntos centrales de la superficie se podrán obtener "a posteriori" por intersección de ella con las distintas generatrices.

Finalmente, puesto que esta línea corta –o es tangente– a todas las generatrices, nos va a permitir también elegirla como directriz de una nueva representación equivalente que denominaremos "parametrización intrínseca" de la superficie reglada o bien "parametrización canónica" de la misma.

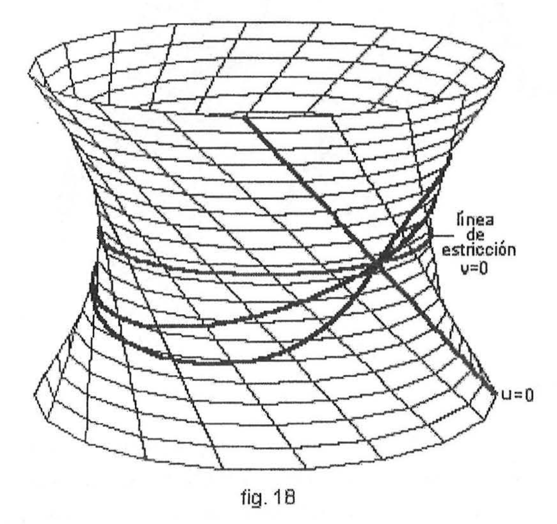


fig. 18

Una diferencia conceptual de la línea de estricción con los lugares geométricos vistos en **§6** consiste en que aquí los puntos centrales están inducidos en el propio espacio de la superficie.

Podremos comprobar posteriormente que la línea de estricción del hiperboloide reglado:

(−sen u + v cos u, cos u +v sen u, v)

se convierte en su circunferencia de radio mínimo, que es intersección de la superficie con el plano **z = 0**. En la figura 18 se representa esta curva, para su comparación con el lugar geométrico de los puntos inducidos sobre las demás generatrices por la **u=0** y con el lugar geométrico de los puntos centrales que induce sobre las generatrices el punto **u = 0**, **v = 0**, que pertenece a este círculo de garganta, y que fueron obtenidos en el **§ 6**.

§ 9.- Determinación de la línea de estricción. Planos central y asintótico. Otros resultados anexos.

Consideramos, en principio, la superficie reglada $\underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u}) + \mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}\,(\mathbf{u})$ con $\dot{\underline{\mathbf{D}}} \neq \mathbf{0}$. La génesis y determinación de la línea de estricción puede abordarse desde distintos puntos de vista y por otra parte, los puntos centrales de la superficie pueden situarse sobre cada generatriz partiendo de su intersección con la directriz $\underline{\mathbf{D}}$ tomada en la representación, o bien desde los extremos de la generatriz, es decir, desde su punto impropio. En este último caso estamos suponiendo extendidas las generatrices hasta el infinito y, consecuentemente, la localización de los puntos centrales requiere conocimientos del espacio proyectivo. Con respecto a esta última forma de situar los puntos centrales nos limitaremos a dar las oportunas indicaciones en el **§ 10**, una vez conocidos algunos elementos vinculados a ellos. Aquí vamos a generar la línea de estricción desde la definición de puntos centrales descrita anteriormente, es decir, como puntos de intersección con cada generatriz del límite de la perpendicular común entre dos generatrices próximas cuando ambas tienden a superponerse y la localización se hará con referencia a la intersección de la generatriz con la directriz $\underline{\mathbf{D}}$.

Un esquema muy sencillo de este planteamiento, sin las correcciones que después haremos y utilizando, además, el vector $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$ que simplifica y reduce todo el análisis, lo que de algún modo le resta flexibilidad, puede verse en las "Lectures on Classical Differential Geometry" del holandés **D. J. Struik** (1894-2000), matemático muy interesado, entre otras cosas, por aspectos históricos de la matemática durante el Renacimiento y también, más tarde, por los orígenes de la Ciencia en el ambiente social de América. En su momento este matemático emigró a Estados Unidos, con preferencia sobre la antigua URSS, recomendado por **Norbert Wiener**, y trabajó hasta el final de su carrera en el Instituto Tecnológico de Massachussets. En 1951, y hasta el año 1955, fue represaliado por el comité **McCarthy**. En algunos ámbitos científicos ha sido considerado uno de los grandes matemáticos del siglo XX.

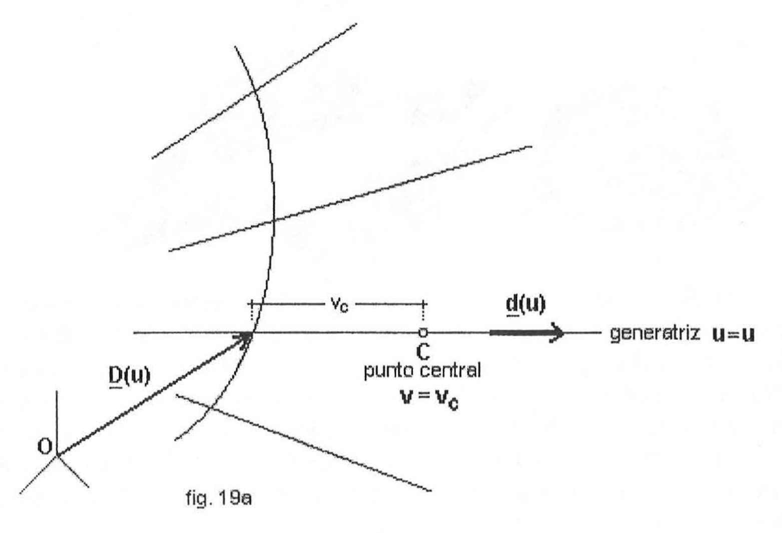


fig. 19a

Ocurre que en cada punto central, la dirección del vector $(\underline{\mathbf{d}} \times \dot{\underline{\mathbf{d}}}) \times \underline{\mathbf{d}}$ va a tener una importante relación con la línea de estricción y esta dirección se obtiene de forma inmediata si se parte de la parametrización de la superficie en la forma $\underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u}) + \mathbf{v}\,\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u})$, ya que en este caso tal dirección coincide con la del vector $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$. Es conveniente, por lo tanto, partir de esta representación de la superficie y después corregir la fórmula para su cálculo con cualquier parametrización más general. La corrección se describirá en el **§ 10**. El proceso resulta así menos engorroso que

introducir los ajustes en la propia deducción que, de esta otra forma, puede realizarse simplemente. Por otra parte, el uso del vector $\underline{\mathbf{d}}_1$ nos facilita, además, la localización de los puntos centrales sobre cada generatriz desde su intersección con la directriz, porque esta distancia viene medida directamente por el valor del parámetro "v" que denominaremos "$\mathbf{v}_C$" (figura 19a).

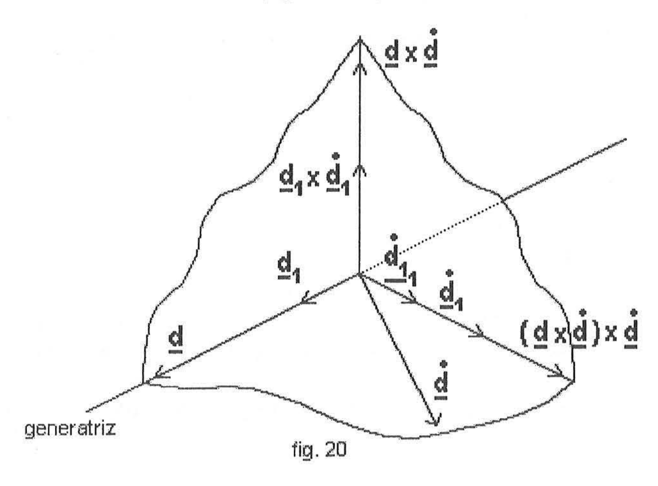


fig. 20

Puede comprenderse mejor la situación relativa entre los vectores involucrados y sus correspondientes unitarios sobre la figura 20, en la que se han situado los módulos y sentidos de los vectores de manera que la disposición resulte representativa de su posición relativa. El que los vectores unitarios aparezcan con longitud menor también es un puro convenio. Puede observarse que $\underline{\mathbf{d}}$ y $\underline{\mathbf{d}}_1$ tienen, trivialmente, la misma dirección, y que $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$ –que, en general, no será unitario– es normal a $\underline{\mathbf{d}}_1$ por ser éste unitario. El vector unitario con la dirección de $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$ lo representamos por $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_{1_1}$–vector que no se utilizará–. El vector $\dot{\underline{\mathbf{d}}}$ estará en el mismo plano que $\underline{\mathbf{d}}$ y $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$, y perpendicular a este plano están los vectores $\dot{\underline{\mathbf{d}}}\times\underline{\mathbf{d}}$ y $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1\times\underline{\mathbf{d}}_1$ entre otros. Finalmente la dirección de $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$ es la del vector $(\underline{\mathbf{d}}\times\dot{\underline{\mathbf{d}}})\times\underline{\mathbf{d}}$.

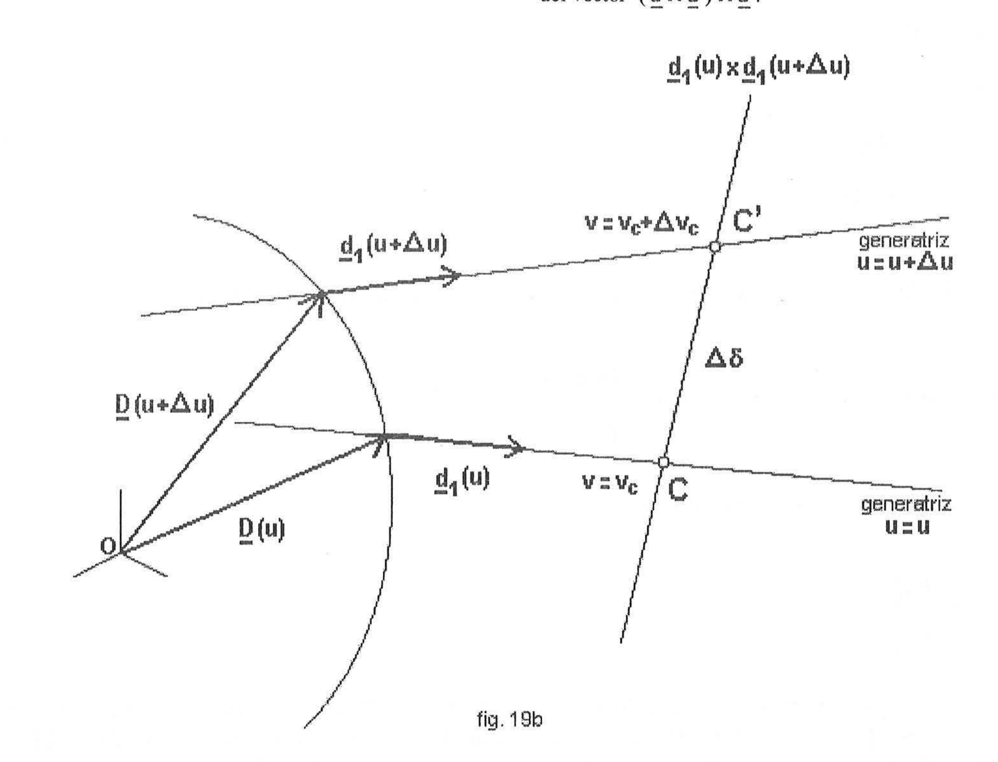


fig. 19b

Consideramos por tanto la superficie $\underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u})+\mathbf{v}\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u})$, con $\dot{\underline{\mathbf{D}}}\,(\mathbf{u})\neq\mathbf{0}$ y sobre ella una generatriz $\mathbf{u}=\mathbf{u}$ y otra próxima $\mathbf{u}=\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}$, con $\Delta\mathbf{u}>\mathbf{0}$, (figura 19b). Los puntos centrales que se inducen en las mismas serán los puntos C y C' situados sobre cada una de ellas desde la intersección con la directriz $\underline{\mathbf{D}}$ a distancias $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}=\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$ respectivamente. La recta C-C' es la perpendicular común a las dos generatrices; esta dirección normal a $\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u})$ y a $\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})$ será normal también a $\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})-\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u})$, así que puede ser representada por el vector $\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u})\times(\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})-\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u}))$. La distancia entre los puntos C y C' es $\Delta\boldsymbol{\delta}$.

Teniendo en cuenta la figura 19b, se verificará con $\Delta\mathbf{u}>\mathbf{0}$:

$$\underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u})+\mathbf{v}\;\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u})+\Delta\delta\,\frac{\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u})\times(\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})-\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u}))}{|\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u})\times(\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})-\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u}))|}=\underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})+(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})\;\underline{\mathbf{d}}_1(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}),$$

o sea:

$$\underline{D}(u+\Delta u)-\underline{D}(u)+v(\underline{d}_1(u+\Delta u)-\underline{d}_1(u))+\Delta v\ \underline{d}_1(u+\Delta u)=\Delta\delta\ \frac{\underline{d}_1(u)\times(\underline{d}_1(u+\Delta u)-\underline{d}_1(u))}{|\underline{d}_1(u)\times(\underline{d}_1(u+\Delta u)-\underline{d}_1(u))|}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{\underline{D}(u+\Delta u)-\underline{D}(u)}{\Delta u}+v\ \frac{\underline{d}_1(u+\Delta u)-\underline{d}_1(u)}{\Delta u}+\frac{\Delta v}{\Delta u}\ \underline{d}_1(u+\Delta u)=\frac{\Delta\delta}{\Delta u}\ \frac{\underline{d}_1(u)\times\frac{\underline{d}_1(u+\Delta u)-\underline{d}_1(u)}{\Delta u}}{\left|\underline{d}_1(u)\times\frac{\underline{d}_1(u+\Delta u)-\underline{d}_1(u)}{\Delta u}\right|},$$

así que cuando $\Delta u\to 0$:

$$\dot{\underline{D}}(u)+v\dot{\underline{d}}_1(u)+\frac{\Delta v}{\Delta u}\Big|_{u\to\infty}\underline{d}_1(u)=\frac{\Delta\delta}{\Delta u}\Big|_{u\to\infty}\ \frac{\underline{d}_1(u)\times\dot{\underline{d}}_1(u)}{|\underline{d}_1(u)\times\dot{\underline{d}}_1(u)|} \qquad (3)$$

Podemos deducir diferentes resultados de esta ecuación pero lo que nos interesa ahora es determinar el punto central límite sobre la generatriz **u=u** representado por el valor "**v**" y esto se obtiene sin más que multiplicar escalarmente ambos miembros de la ecuación por el vector $\dot{\underline{d}}_1(u)$. De esta manera y puesto que $\dot{\underline{d}}_1$ es normal a $\underline{d}_1$ y a $\frac{\underline{d}_1\times\dot{\underline{d}}_1}{|\underline{d}_1\times\dot{\underline{d}}_1|}$, se verificará: $\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1+v\ \dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1=0$,

y de aquí:

$$v=v_C=-\frac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1}=-\frac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{|\dot{\underline{d}}_1|^2} \qquad (3.1)$$

así que la línea de estricción vendrá expresada sobre la superficie por la curva $v=v_C$:

$$\underline{w}(u)=\underline{D}(u)+v_C\ \underline{d}_1(u)=\underline{D}(u)-\frac{\dot{\underline{D}}(u).\dot{\underline{d}}_1(u)}{\dot{\underline{d}}_1(u).\dot{\underline{d}}_1(u)}\ \underline{d}_1(u),$$

que escribiremos usualmente en la forma:

$$\underline{w}=\underline{D}-\frac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1}\ \underline{d}_1 \qquad (3.2)$$

Aunque no tenemos intención de utilizar habitualmente esta fórmula (3.2), podemos comprobar que tanto en el hiperboloide **(−sen u, cos u, 0) +v {cos u, sen u, 1}**(1) como en el conoide **(0, u, 0) +v {1, 0, cos u}**(2), que hemos venido utilizando, la línea de estricción coincide con la propia directriz de la representación:

En el primer caso $\dot{\underline{D}}=\{-\cos u,\ -\operatorname{sen} u,\ 0\}$, $\underline{d}_1=\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} u,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\}$, $\dot{\underline{d}}_1=\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} u,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos u,\ 0\}$,

así que $\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1=0$, $\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1=\frac{1}{2}$; la línea de estricción quedará: $\underline{w}(u)=\underline{D}(u)-\frac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1}=\underline{D}(u)=\{-\operatorname{sen} u,\ \cos u,\ 0\}$

En el conoide $\dot{\underline{D}}=\{0,\ 1,\ 0\}$, $\underline{d}_1=\{\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u}},\ 0,\ \frac{\cos u}{\sqrt{1+\cos^2 u}}\}$, $\dot{\underline{d}}_1=\{\frac{\operatorname{sen} u\ \cos u}{(1+\cos^2 u)^{3/2}},\ 0,\ \frac{-\operatorname{sen} u}{(1+\cos^2 u)^{3/2}}\}$,

por lo que $\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1=0$, $\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1=\frac{\operatorname{sen}^2 u}{(1+\cos^2 u)^2}$,

y la línea de estricción será: $\underline{w}(u) = \underline{D}(u) - \dfrac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1} = \underline{D}(u) = \{0, u, 0\}$.

Obsérvese que estando perfectamente determinada la línea de estricción sobre esta superficie, el cálculo nos ofrece un valor indeterminado de $\dfrac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1}$ para valores $u = 0, u = \pi$... etc, que son los que determinan en la superficie las generatrices de puntos parabólicos –"parabólicas" o "cilíndricas"–. A esta circunstancia nos referiremos más adelante.

Tomando sin embargo la superficie[3]: $(v, u - v, v\,u^2) = (0, u, 0) + v\{1, -1, u^2\}$, obtenemos los vectores:

$$\dot{\underline{D}} = \{0, 1, 0\}, \quad \underline{d}_1 = \{\frac{1}{\sqrt{2+u^4}}, -\frac{1}{\sqrt{2+u^4}}, \frac{u^2}{\sqrt{2+u^4}}\}, \quad \dot{\underline{d}}_1 = \{-\frac{2\,u^3}{(2+u^4)^{3/2}}, \frac{2\,u^3}{(2+u^4)^{3/2}}, \frac{4\,u}{(2+u^4)^{3/2}}\},$$

y los productos escalares: $\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1 = \dfrac{2\,u^3}{(2+u^4)^{3/2}}$, $\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1 = \dfrac{8\,u^2(2+u^4)}{(2+u^4)^3}$, así que $\dfrac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1} = \dfrac{u}{4}\sqrt{2+u^4}$,

y la línea de estricción vendrá determinada por la curva:

$$\underline{w}(u) = \underline{D}(u) - \frac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1}\underline{d}_1(u) = \{0, u, 0\} - \frac{u}{4}\sqrt{2+u^4}\,\{\frac{1}{\sqrt{2+u^4}}, -\frac{1}{\sqrt{2+u^4}}, \frac{u^2}{\sqrt{2+u^4}}\} = \{-\frac{u}{4}, \frac{5\,u}{4}, -\frac{u^3}{4}\},$$

proporcionando el cálculo la misma indeterminación para la generatriz "parabólica" o "cilíndrica" $u = 0$.
En la figura 21 pueden verse ahora representadas gráficamente estas tres superficies –[1], [2] y [3]– y, resaltada, la línea de estricción de cada una de ellas. Estos cálculos volverán a realizarse en el **§ 10**, utilizando una fórmula más general, sin necesidad de tener que trabajar con el vector $\underline{d}_1$ y calcular necesariamente el $\dot{\underline{d}}_1$.

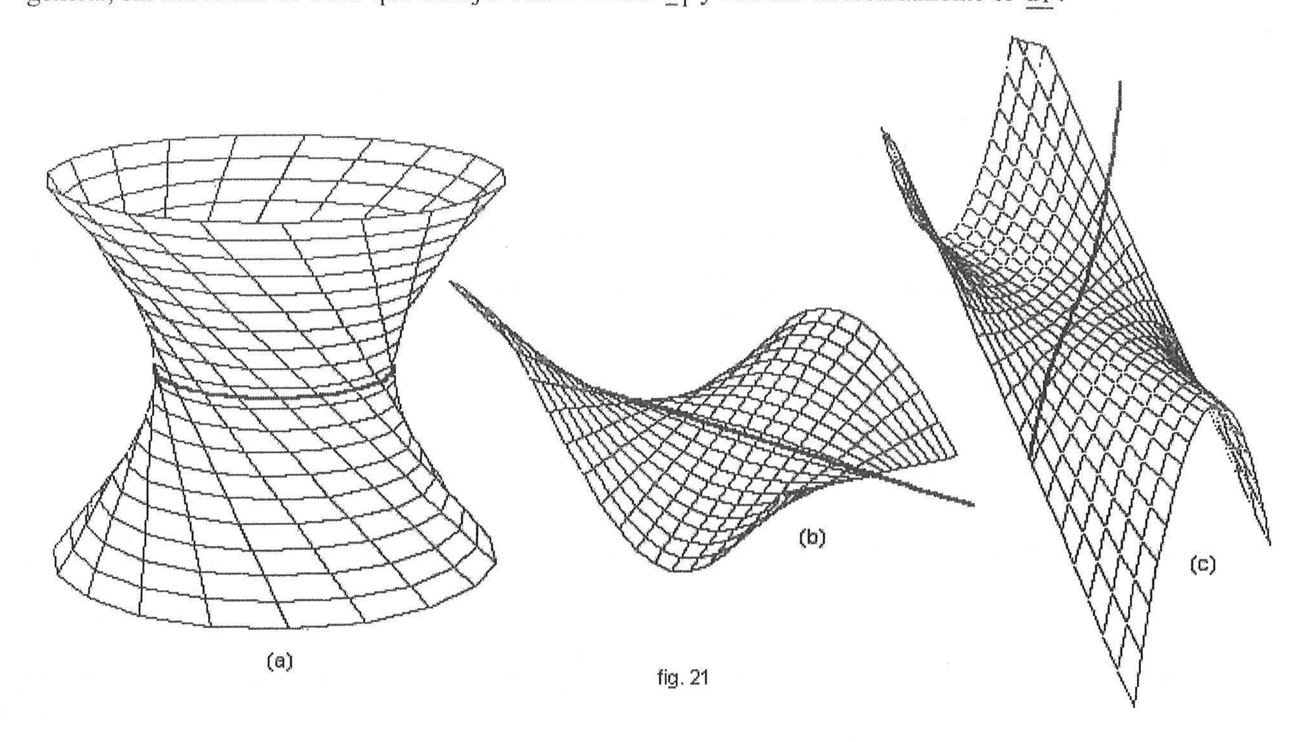


fig. 21

Las tangentes a la línea de estricción $_{(3.2)}$ así construida son ahora, trivialmente, normales al vector $\dot{\underline{d}}_1$ ya que al ser

$$\underline{d}_1.\dot{\underline{d}}_1 = 0 \quad y \quad \dot{\underline{w}} = \dot{\underline{D}} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1}\right) - \frac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1}\dot{\underline{d}}_1, \text{ resulta } \dot{\underline{w}}.\dot{\underline{d}}_1 = \dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1 - \dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1 = 0,$$

y de aquí que en la representación más general $\underline{D}(u)+v\,\underline{d}(u)$ la dirección $(\underline{d}\times\dot{\underline{d}})\times\underline{d}$ –que es la $\dot{\underline{d}}_1$ – resulte vinculada a la línea de estricción por la perpendicularidad con su tangente. De hecho, la línea de estricción es la única curva sobre la superficie que posee tal propiedad, ya que sobre la representación $\underline{D}(u)+v\,\underline{d}_1(u)$, el $v = v(u)$ que determine una curva $\underline{D}(u)+v(u)\ \underline{d}_1(u)$ tal que sus tangentes sean normales a $\dot{\underline{d}}_1$, deberá verificar:

$$(\dot{\underline{D}}+\dot{v}\ \underline{d}_1+v\ \dot{\underline{d}}_1).\dot{\underline{d}}_1=0 \qquad\Rightarrow\qquad \dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1+v\ \dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1=0, \qquad \text{así que } v=-\frac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1}=v_C,$$

y esta curva es única. La línea de estricción puede, por lo tanto, definirse matemáticamente como una curva sobre la superficie tal que es normal en todos sus puntos al vector $\dot{\underline{d}}_1$ (o al $(\underline{d}\times\dot{\underline{d}})\times\underline{d}$). Utilizar esta propiedad privativa de la línea de estricción como definición de la misma parece, no obstante, poco representativo.

Multiplicando ahora vectorialmente la $_{(3)}$ por el vector $\underline{d}_1$, obtenemos:

$$(\dot{\underline{D}}\times\underline{d}_1)+v\,(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)=\frac{\Delta\delta}{\Delta u}_{u\to\infty}\ \frac{\underline{d}_1(u)\times\dot{\underline{d}}_1(u)}{\left|\underline{d}_1(u)\times\dot{\underline{d}}_1(u)\right|}\times\underline{d}_1=\frac{\Delta\delta}{\Delta u}_{u\to\infty}\ \frac{\dot{\underline{d}}_1}{\left|\dot{\underline{d}}_1\right|} \qquad (3.3)$$

y multiplicando ahora esta última escalarmente por $(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)$, se puede obtener:

$$(\dot{\underline{D}}\times\underline{d}_1)(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)+v\,(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)=\frac{\Delta\delta}{\Delta u}_{u\to\infty}\ \frac{\dot{\underline{d}}_1}{\left|\dot{\underline{d}}_1\right|}\ (\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)=0$$

de donde: $v=v_C=-\dfrac{(\dot{\underline{D}}\times\underline{d}_1)(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)}{(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)}$,

y, por lo tanto, la línea de estricción deberá poderse expresarse en la forma:

$$\underline{w}=\underline{D}-\frac{(\dot{\underline{D}}\times\underline{d}_1)(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)}{(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)}\ \underline{d}_1 \qquad (3.4)$$

Resultado que podremos comparar con el que se obtendrá en el § **10**.

Finalmente, la fórmula $_{(3.3)}$ con $\dfrac{\Delta\delta}{\Delta u}_{u\to\infty}=\dot{\delta}$, puede escribirse:

$$(\dot{\underline{D}}+v\ \dot{\underline{d}}_1)\times\underline{d}_1=\dot{\delta}\ \frac{\dot{\underline{d}}_1}{\left|\dot{\underline{d}}_1\right|} \qquad (3.5)$$

y la función $\dot{\delta}$, por otra parte, puede ser obtenida de $_{(3)}$ multiplicándola escalarmente por $\dfrac{\underline{d}_1\times\dot{\underline{d}}_1}{\left|\underline{d}_1\times\dot{\underline{d}}_1\right|}$. Teniendo en cuenta que este vector –unitario– es normal a $\underline{d}_1$ y a $\dot{\underline{d}}_1$, con $|\underline{d}_1|=1$, **sen** $(\underline{d}_1,\dot{\underline{d}}_1)=1\Rightarrow\left|\underline{d}_1\times\dot{\underline{d}}_1\right|=\left|\dot{\underline{d}}_1\right|$,

obtenemos: $\dot{\underline{D}}\ \dfrac{\underline{d}_1\times\dot{\underline{d}}_1}{\left|\underline{d}_1\times\dot{\underline{d}}_1\right|}=\dfrac{(\dot{\underline{D}},\underline{d}_1,\dot{\underline{d}}_1)}{\left|\dot{\underline{d}}_1\right|}=\dot{\delta}$.

Recordando ahora que el numerador es el definido como el correspondiente "parámetro de distribución" de la superficie $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}^*(\mathbf{u})$, el resultado anterior podremos escribirlo en la forma:

$$\dot{\delta} = \frac{(\dot{\underline{\mathbf{D}}}, \underline{\mathbf{d}}_1, \dot{\underline{\mathbf{d}}}_1)}{\left|\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1\right|} = \frac{\mathbf{f}^*}{\left|\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1\right|} \qquad (3.6)$$

y, finalmente, el resultado $_{(3.5)}$ puede ser expresado:

$$(\dot{\underline{\mathbf{D}}} + \mathrm{v}\, \dot{\underline{\mathbf{d}}}_1) \times \underline{\mathbf{d}}_1 = \dot{\delta} \frac{\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1}{\left|\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1\right|} = \frac{\mathbf{f}^*}{\left|\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1\right|^2} \dot{\underline{\mathbf{d}}}_1 \qquad (3.7)$$

El cociente $\frac{\mathbf{f}^*(\mathbf{u})}{\left|\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1(\mathbf{u})\right|^2} = \mathbf{h}^*(\mathbf{u})$ que aparecerá vinculado a distintos resultados en el **§ 10** – donde encontraremos también su interpretación vectorial –, puede ser alternativamente definido como "parámetro de distribución" de la superficie –en lugar de $\mathbf{f}^*$–, lo que permite expresar determinadas fórmulas de manera más simplificada. Esta otra denominación está en realidad condicionada al uso de la parametrización expresada en función del vector unitario $\underline{\mathbf{d}}_1$ y de todo el análisis "teórico" de la superficie en estas condiciones.

El resultado $_{(3.7)}$ presenta, sin embargo, una importante conclusión y es que la normal a la superficie en el punto central de la generatriz tiene la dirección del vector $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$ así que el plano tangente en este punto quedará determinado por los vectores $\underline{\mathbf{d}}_1$ y $\underline{\mathbf{d}}_1 \times \dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$, resultado al que llegaremos inmediatamente por otros medios.

Puesto que el vector $\underline{\mathbf{d}}_1$ y $\dot{\underline{\mathbf{w}}}$ son normales a $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$, el plano tangente a la superficie en los puntos de la línea de estricción –puntos centrales de la superficie– contendrá a $\underline{\mathbf{d}}_1$ y también a $\underline{\mathbf{d}}_1 \times \dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$ (o bien al $\underline{\mathbf{d}} \times \dot{\underline{\mathbf{d}}}$). Estos planos tangentes a la superficie en cada punto central se denominan **planos centrales** de la superficie que podemos situar en los puntos de intersección de cada generatriz con la línea de estricción por su vector característico $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$ o bien por el vector $(\underline{\mathbf{d}} \times \dot{\underline{\mathbf{d}}}) \times \underline{\mathbf{d}}$. En cada generatriz existe, lógicamente, un solo plano central.

Podemos completar ahora la secuencia de variación de los planos tangentes a la superficie a lo largo de una generatriz con la inclusión de los planos centrales. El análisis completo se efectúa sobre la figura 22 con esquemas complementarios para diferentes puntos representativos.

El punto "C" es el punto central de la generatriz, intersección con la línea de estricción, la tangente a ésta se encuentra en el plano central de la generatriz determinado por los vectores $\underline{\mathbf{d}}_1$ y $\underline{\mathbf{d}}_1 \times \dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$ y cuyo vector normal es el $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$. En el punto del infinito "I" de la generatriz ($\mathrm{v} \rightarrow \infty$), a ambos lados del punto central, el plano tangente es el mismo y queda determinado por los vectores $\underline{\mathbf{d}}_1$ y $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$, este es el denominado **plano tangente asintótico** de la generatriz –y será introducido más propiamente en el **§ 10**–. Ambos planos, central y asintótico, son normales. El punto "P" es un punto genérico de este haz, en el que su plano tangente está definido por los vectores $\underline{\mathbf{d}}_1$ y $\dot{\underline{\mathbf{D}}} + \mathrm{v}\, \dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$ y el punto "D" es el punto en que la generatriz corta a la directriz $\underline{\mathbf{D}}$ en el que estará determinado por $\underline{\mathbf{d}}_1$ y $\dot{\underline{\mathbf{D}}}$ ($\mathrm{v} = \mathbf{0}$). En esta figura 22 se ha representado la dirección y los módulos de los vectores involucrados –que aparte de su posición relativa pueden ser totalmente arbitrarios– de forma que resulten ilustrativos.

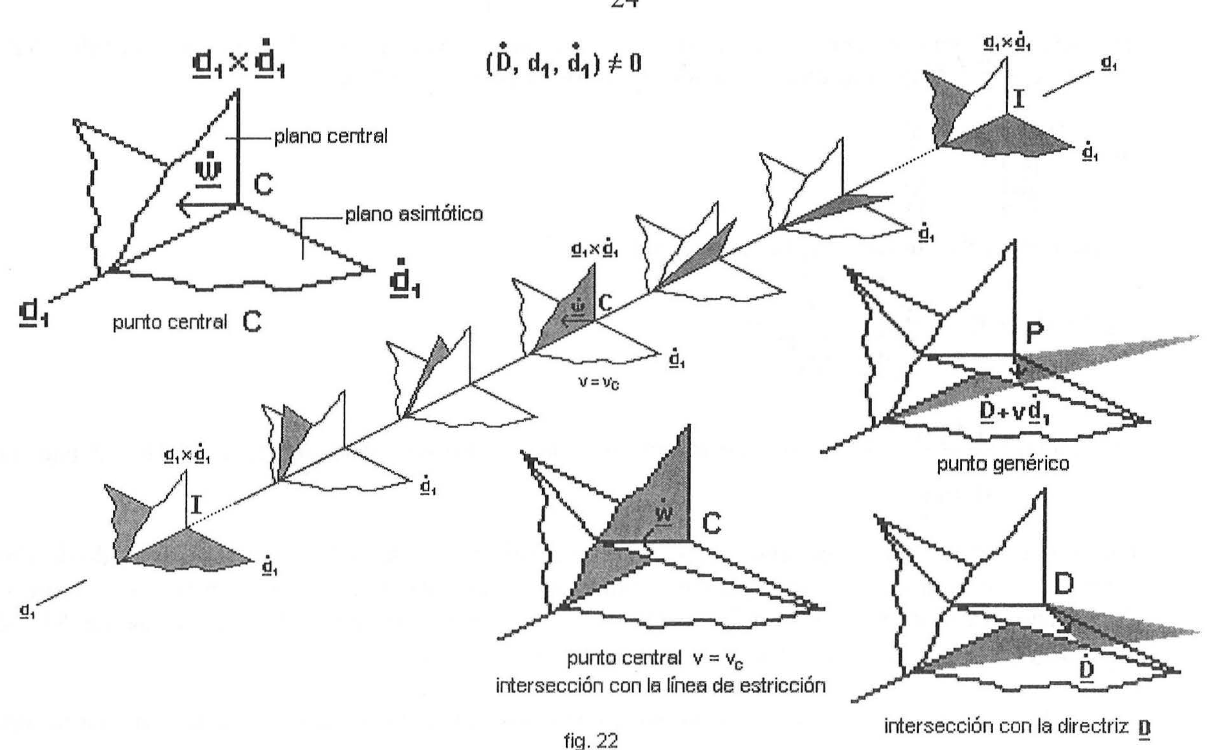


fig. 22

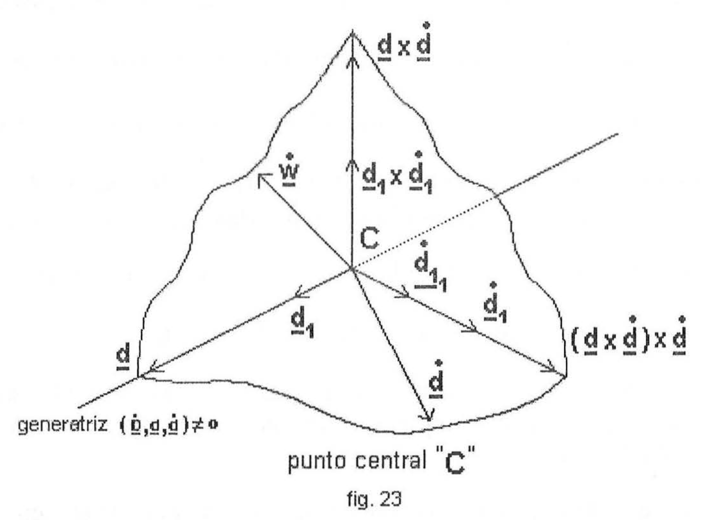


fig. 23

Con el mismo convenio, en la figura 23 se completa el análisis de la disposición de los vectores en uno de los puntos centrales. Aquí se incluye el vector tangente a la línea de estricción $\dot{\underline{w}}$ –que puede tener cualquier dirección y sentido dentro del plano central– para mostrar su relación con los vectores $\underline{d}$, $\dot{\underline{d}}$, $\underline{d}\times\dot{\underline{d}}$ y $(\underline{d}\times\dot{\underline{d}})\times\underline{d}$ en cualquier parametrización de la superficie reglada siempre que $(\dot{\underline{D}}, \underline{d}, \dot{\underline{d}}) \neq 0$.

§ 10.- Corrección de la fórmula y cálculo de la línea de estricción para cualquier representación reglada de la superficie. Los puntos centrales como contacto de la superficie con los planos centrales.

Conocida y aplicada en **§ 9** la $_{(3.2)}$ y la caracterización vectorial de la propia línea de estricción, queda por obtener una fórmula que pueda ser utilizada para cualquier representación reglada de la superficie $\underline{D} + v\,\underline{d}$. Este resultado puede ser obtenido desde la fórmula $_{(3.4)}$ pero se puede deducir desde la fórmula $_{(3.1)}$ y, aunque este último método resulta algo laborioso, nos permite obtener algún resultado complementario interesante como la obtención del módulo del vector $\dot{\underline{d}}_1$ en función de los vectores $\underline{d}$ y $\dot{\underline{d}}$. Posteriormente tendremos ocasión de obtener la misma fórmula, de manera más simple, determinando cada punto central por el contacto de la superficie con el correspondiente plano central.

Puesto que $\underline{d}_1 = \frac{1}{|\underline{d}|}\underline{d}$, su derivada $\dot{\underline{d}}_1 = \frac{1}{|\underline{d}|}\dot{\underline{d}} - \frac{1}{|\underline{d}|^2}\left(\frac{\partial}{\partial u}|\underline{d}|\right)\underline{d}$, y de aquí $\dot{\underline{d}}_1 \times \underline{d}_1 = \frac{1}{|\underline{d}|^2}(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})$,

así que $|\dot{\underline{d}}_1 \times \underline{d}_1|^2 = |\dot{\underline{d}}_1|^2 = \dot{\underline{d}}_1 . \dot{\underline{d}}_1 = \frac{|\dot{\underline{d}} \times \underline{d}|^2}{|\underline{d}|^4} = \frac{(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}{|\underline{d}|^4}$, de donde se obtiene $|\dot{\underline{d}}_1| = \frac{|\dot{\underline{d}}\times\underline{d}|}{|\underline{d}|^2}$.

Por otro lado,

$$\dot{\underline{d}}_1 = |\dot{\underline{d}}_1| \frac{(\underline{d}\times\dot{\underline{d}})\times\underline{d}}{|(\underline{d}\times\dot{\underline{d}})\times\underline{d}|} = \frac{|\dot{\underline{d}}_1|}{|\underline{d}\times\dot{\underline{d}}|\,|\underline{d}|}(\underline{d}\times\dot{\underline{d}})\times\underline{d} = \frac{1}{|\underline{d}|^3}(\underline{d}\times\dot{\underline{d}})\times\underline{d},$$

por lo que podemos escribir:

$$\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1 = \frac{\dot{\underline{D}}((\underline{d}\times\dot{\underline{d}})\times\underline{d})}{|\underline{d}|^3} = \frac{(\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}})(\underline{d}.\underline{d}) - (\dot{\underline{D}}.\underline{d})(\dot{\underline{d}}.\underline{d})}{|\underline{d}|^3} = \frac{(\dot{\underline{D}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}{|\underline{d}|^3},$$

con lo que, finalmente: $\frac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1} = \frac{(\dot{\underline{D}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}{(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}|\underline{d}|$,

y de aquí, teniendo en cuenta la fórmula $_{(3.2)}$, la línea de estricción resulta

$$\underline{w}\,(u) = \underline{D} - \frac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1}\underline{d}_1 = \underline{D} - \frac{(\dot{\underline{D}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}{(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}|\underline{d}|\,\underline{d}_1 = \underline{D}\,(u) - \frac{(\dot{\underline{D}}(u)\times\underline{d}(u))(\dot{\underline{d}}(u)\times\underline{d}(u))}{(\dot{\underline{d}}(u)\times\underline{d}(u))(\dot{\underline{d}}(u)\times\underline{d}(u))}\underline{d}\,(u) \qquad (4.a)$$

que escribiremos simplemente:

$$\underline{w} = \underline{D} - \frac{(\dot{\underline{D}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}{(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}\underline{d} \qquad (4.b)$$

ecuación muy sencilla de aplicar para cualquier representación $\underline{D}$ +v $\underline{d}$, cuya particularización es la $_{(3.4)}$. Substituye con muchas ventajas, desde el punto de vista práctico, a la $_{(3.2)}$ y es la que utilizaremos habitualmente.

Podemos volver a calcular ahora, con esta nueva fórmula, las líneas de estricción correspondientes a las superficies:

(−sen u, cos u, 0) + v {cos u, sen u, 1}$^{(1)}$, **(0, u, 0) + v {1, 0, cos u}**$^{(2)}$, **(0, u, 0) +v {1, −1, u^2}**$^{(3)}$,
realizadas en el § 9. En la primera de ellas $^{(1)}$, se obtienen los vectores:

$$\dot{\underline{D}}\times\underline{d} = \begin{vmatrix} -\cos u & -\text{sen}\, u & 0 \\ \cos u & \text{sen}\, u & 1 \end{vmatrix} = \{-\text{sen u, cos u, } 0\}, \qquad \dot{\underline{d}}\times\underline{d} = \begin{vmatrix} -\text{sen}\, u & \cos u & 0 \\ \cos u & \text{sen}\, u & 1 \end{vmatrix} = \{\text{cos u, sen u, } -1\},$$

así que, al ser $(\dot{\underline{D}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d}) = 0$, $(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d}) = 2$, de la fórmula $_{(4.b)}$ se deduce:
$\underline{w}\,(u) = \underline{D}\,(u) = (-\text{sen u, cos u, } 0)$,
y la línea de estricción coincide con la directriz de la representación.
Lo mismo le ocurre a la segunda superficie $^{(2)}$, en la que se obtienen:

$$\dot{\underline{D}}\times\underline{d} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cos u \end{vmatrix} = \{\text{cos u, } 0, -1\} \qquad \dot{\underline{d}}\times\underline{d} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\text{sen}\, u \\ 1 & 0 & \cos u \end{vmatrix} = \{0, -\text{sen u, } 0\},$$

con $(\dot{\underline{D}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d}) = 0$, $(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d}) = \text{sen u}$, la fórmula $_{(4.b)}$ nos proporciona $\underline{w}\,(u) = \underline{D}\,(u) = (0, u, 0)$.
En cuanto a la tercera superficie $^{(3)}$, obtenemos:

$$\dot{\underline{D}}\times\underline{d} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & u^2 \end{vmatrix} = \{u^2, 0, -1\} \qquad \dot{\underline{d}}\times\underline{d} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2\,u \\ 1 & -1 & u^2 \end{vmatrix} = \{2\,u, 2\,u, 0\},$$

siendo aquí $(\dot{\underline{D}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d}) = 2\,u^3$, $(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d}) = 8\,u^4$, la fórmula $_{(4.b)}$ nos proporciona

$$\underline{w} = \underline{D} - \frac{(\dot{\underline{D}} \times \underline{d})(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})}{(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})}\, \underline{d} = (0,\ u,\ 0) - \frac{2\ u^3}{8\ u^2}\{1, -1, u^2\} = (0,\ u,\ 0) - \frac{u}{4}\{1, -1, u^2\} = \{-\frac{u}{4}, \frac{5\ u}{4}, -\frac{u^3}{4}\},$$

que es el resultado obtenido en § **9**.

Como se ha dicho, los puntos centrales (de la línea de estricción) sobre cada generatriz pueden también situarse desde su punto impropio, utilizando métodos del espacio proyectivo. En estas condiciones, habría que comenzar, por ejemplo, describiendo las propiedades proyectivas sobre las generatrices en lo referente a los planos tangentes a lo largo de ellas. Sin embargo, ya que hemos introducido la nomenclatura de los elementos más importantes, plano central y plano asintótico, nos limitaremos a describir sucintamente el procedimiento para obtener estos elementos y para alcanzar la fórmula $_{(4.b)}$.

En cualquier superficie $\underline{r}$ **(u, v)** = $\underline{D}$ **(u)**+v $\underline{d}$ **(u)**, el plano tangente contiene a los vectores $\underline{r}_u = \dot{\underline{D}} + v\ \dot{\underline{d}}$ y $\underline{r}_v = \underline{d}$. El haz de planos tangentes a lo largo de cada generatriz **u** = $\mathbf{u_o}$ podrá representarse por

$$(\underline{r} - \underline{r}(u_o, v)) \left[(\dot{\underline{D}} \times \underline{d}) + v(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})\right]_{u=u_0} = 0,$$

dependiente solamente del parámetro "v". De todos ellos, el plano en el punto impropio de la generatriz se obtendrá para $v \to \infty$ y le hemos denominado **plano asintótico**. La dirección característica de este plano es, trivialmente, la del vector $\dot{\underline{d}} \times \underline{d}$, así que su ecuación será:

$$(\underline{r} - \underline{r}(u_o, v)) \left[\dot{\underline{d}} \times \underline{d}\right]_{u=u_0} = 0.$$

El plano del haz perpendicular al asintótico será el plano central y su vector característico se obtendrá calculando el $v = v_C^o$ tal que

$$((\dot{\underline{D}} \times \underline{d}) + v_C^o\ (\dot{\underline{d}} \times \underline{d})\ (\dot{\underline{d}} \times \underline{d}) = 0, \qquad \text{para } \mathbf{u} = \mathbf{u_o},$$

esto implica que $(\dot{\underline{D}} \times \underline{d})\ (\dot{\underline{d}} \times \underline{d}) + v_C^o\ (\dot{\underline{d}} \times \underline{d})\ (\dot{\underline{d}} \times \underline{d}) = 0$, y de aquí:

$$v_C^o = -\frac{(\dot{\underline{D}} \times \underline{d})(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})}{(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})}, \qquad \text{para } \mathbf{u} = \mathbf{u_o},$$

así que el plano central sobre cada generatriz podrá escribirse:

$$(\underline{r} - \underline{r}(u_o, v))\ ((\dot{\underline{D}} \times \underline{d}) - \frac{(\dot{\underline{D}} \times \underline{d})(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})}{(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})} (\dot{\underline{d}} \times \underline{d})) = 0, \qquad \text{para } \mathbf{u} = \mathbf{u_o},$$

y el punto de contacto (tangencia) del plano central con la superficie será el punto central de la generatriz **u** = $\mathbf{u_o}$, $v = v_C^o$:

$\underline{r}(u_o, v_C^o) = \underline{D}(u_o) + v_C^o\ \underline{d}(u_o)$.

Finalmente, el lugar geométrico de los puntos centrales de la superficie será, ahora, la línea de estricción, que adopta la formula $_{(4.b)}$ ya conocida:

$$\underline{w} = \underline{D} - \frac{(\dot{\underline{D}} \times \underline{d})(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})}{(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})}\, \underline{d}.$$

Cuando la parametrización de la superficie es la $\underline{D} + v\ \underline{d}_1$, trivialmente la fórmula se convierte en la $_{(3.4)}$ que se puede a su vez reconvertir en la $_{(3.2)}$:

$$\underline{w} = \underline{D} - \frac{(\dot{\underline{D}} \times \underline{d}_1)(\dot{\underline{d}}_1 \times \underline{d}_1)}{(\dot{\underline{d}}_1 \times \underline{d}_1)(\dot{\underline{d}}_1 \times \underline{d}_1)}\, \underline{d}_1 = \underline{D} - \frac{(\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1)(\underline{d}_1.\underline{d}_1) - (\dot{\underline{D}}.\underline{d}_1)(\underline{d}_1.\dot{\underline{d}}_1)}{\left|\dot{\underline{d}}_1\right|^2}\, \underline{d}_1 = \underline{D} - \frac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1}\, \underline{d}_1.$$

§ 11.- La parametrización canónica de una superficie reglada. Algunas propiedades destacadas de la superficie a ambos lados de la línea de estricción.

Con la superficie reglada en cualquiera de sus parametrizaciones $\underline{D}(u)+v\,\underline{d}(u)$, $\dot{\underline{D}}(u)\neq 0$, podemos calcular su línea de estricción $\underline{w}(u)$ con $_{(4.a)}$ y, tomándola como directriz, escribir la parametrización equivalente:

$\underline{w}(u)+v\ \underline{d}_1(u)$,

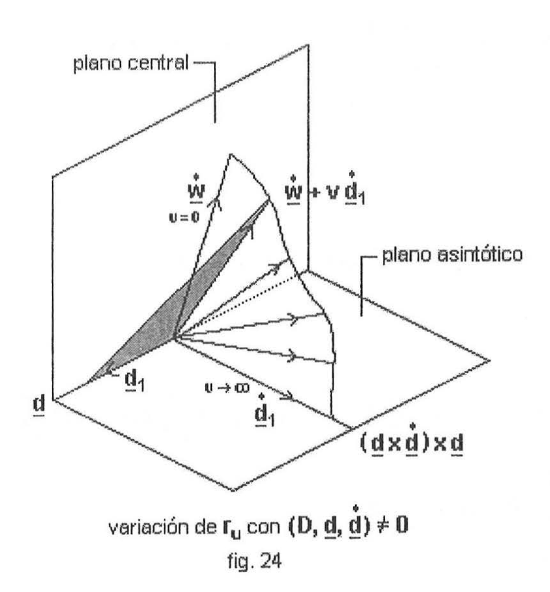
denominada **parametrización canónica** de la superficie reglada, en la que, básicamente los vectores involucrados verifican:

$\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1 = 1, \qquad \underline{d}_1 \cdot \dot{\underline{d}}_1 = 0, \qquad \dot{\underline{w}} \cdot \dot{\underline{d}}_1 = 0,$

lo que a su vez, determina distintas relaciones entre sus combinaciones lineales.

Con el fin de excluir el uso del vector $\underline{d}_1$, nos podremos referir a la representación $\underline{w}(u)+v\ \underline{d}(u)$ como "**parametrización intrínseca**" de la superficie reglada. Desde el punto de vista práctico, lo general es que podamos encontrar directrices más sencillas que la línea de estricción, así que para determinados cálculos puede no resultar recomendable el uso de la parametrización canónica, ni siquiera de la parametrización intrínseca, pero desde el punto de vista del análisis de sus características, la superficie manifiesta su estructura de forma muy económica. El cálculo de la línea de estricción y su parametrización intrínseca puede ser útil para describir mejor muchas superficies importantes y en algunos tipos de superficies como las desarrollables – tales como los conos o las superficies de desarrollo tangencial que estudiaremos en el § **12**– esta representación muestra clara y manifiestamente su carácter por lo que resulta determinante.

Como ya se ha dicho, la línea de estricción $\underline{w}$ divide a cualquier superficie reglada –que no sea un cilindro– en dos sectores a ambos lados de la misma, de manera que en la dirección de las generatrices y en ambos sentidos, posee algunas propiedades comunes descritas por índices iguales. Por otra parte, en la parametrización canónica, el uso del vector $\underline{d}_1$ permite que la distancia de un punto de cualquier generatriz a su punto central (**v=0**), a ambos lados de éste, venga medida directamente por el valor del parámetro "**v**" (**v > 0** o **v < 0** respectivamente).



variación de $\underline{r}_u$ con $(D, \underline{d}, \dot{\underline{d}}) \neq 0$
fig. 24

En la figura 22 ya se mostró cómo a ambos lados del punto central los planos tangentes a la superficie varían desde el plano central al asintótico ($v\rightarrow\infty$). Teniendo en cuenta ahora la parametrización canónica obtenemos el esquema de la figura 24 en el que se muestra la variación del vector $\underline{r}_u = \dot{\underline{w}} + v\,\dot{\underline{d}}_1$ –que junto a $\underline{r}_v = \underline{d}_1$ determina el plano tangente– a lo largo de una de las semirrectas, entre su posición en el plano central ($\dot{\underline{w}}$) a la posición en el plano asintótico ($\dot{\underline{d}}_1$). Lo mismo le ocurre, naturalmente, a la normal a la superficie, variando su dirección desde la del vector $\dot{\underline{d}}_1$, en el punto central, a la dirección $\underline{d}_1\times\dot{\underline{d}}_1$, así que describen un ángulo entre **0** y $\boldsymbol{\pi/2}$ o bien entre **0** y $\boldsymbol{-\pi/2}$ sobre cada una de las semirrectas. Este ángulo es proporcional a la distancia "**v**" (en valor absoluto) al punto central por ambos lados.

En efecto, con $\underline{r}_u = \dot{\underline{w}} + v\,\dot{\underline{d}}_1$ y $\underline{r}_v = \underline{d}_1$, $\underline{r}_u \times \underline{r}_v = (\dot{\underline{w}}\times\underline{d}_1) + v\,(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)$, obtenemos:

$$(\underline{r}_u\times\underline{r}_v)\cdot\dot{\underline{d}}_1 = ((\dot{\underline{w}}\times\underline{d}_1)+v\,(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1))\cdot\dot{\underline{d}}_1 = (\dot{\underline{w}}\times\underline{d}_1)\cdot\dot{\underline{d}}_1 = (\dot{\underline{w}},\underline{d}_1,\dot{\underline{d}}_1) = \mathbf{f}^*, \text{ y}$$

$$(\underline{r}_u\times\underline{r}_v)\times\dot{\underline{d}}_1 = ((\dot{\underline{w}}\times\underline{d}_1)+v\,(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1))\times\dot{\underline{d}}_1 = ((\dot{\underline{w}}\times\underline{d}_1)\times\dot{\underline{d}}_1)+v\,((\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)\times\dot{\underline{d}}_1) = v\,((\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)\times\dot{\underline{d}}_1) =$$

$$= v\,((\dot{\underline{d}}_1\cdot\dot{\underline{d}}_1)\,\underline{d}_1 - (\underline{d}_1\cdot\dot{\underline{d}}_1)\,\dot{\underline{d}}_1) = v\,\left|\dot{\underline{d}}_1\right|^2 \underline{d}_1,$$

estos dos resultados pueden reunirse en la forma:

$$(\underline{r}_u \times \underline{r}_v).\underline{\dot{d}_1} = |\underline{r}_u \times \underline{r}_v|\,|\underline{\dot{d}_1}| \cos(\underline{r}_u \times \underline{r}_v, \underline{\dot{d}_1}) = f^*,$$

$$|(\underline{r}_u \times \underline{r}_v)\times\underline{\dot{d}_1}| = |\underline{r}_u \times \underline{r}_v|\,|\underline{\dot{d}_1}| \operatorname{sen}(\underline{r}_u \times \underline{r}_v, \underline{\dot{d}_1}) = |v|\,|\underline{\dot{d}_1}|^2,$$

y de aquí que

$$\operatorname{tg}(\underline{r}_u \times \underline{r}_v, \underline{\dot{d}_1}) = \frac{|\underline{\dot{d}_1}|^2}{f^*}|v| = \frac{1}{h}|v| \qquad \text{con } h = \frac{f^*}{|\underline{\dot{d}_1}|^2},$$

siendo tanto **f *=f *(u)** como **h=h(u)**, constantes a lo largo de una generatriz. Este resultado muestra que la tangente del ángulo es proporcional a "**v**" a iguales distancias del punto central por ambos lados de la línea de estricción.

Es usual atribuir este último resultado a **M. Chasles** (1793-1880), matemático francés interesado por la Historia y las Matemáticas desde el comienzo de sus estudios en la Escuela Politécnica de París que inició en 1812. **Chasles** publicó su primer trabajo, de enorme influencia, en 1837: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, un examen filosófico-histórico de los diferentes métodos en geometría moderna y fue incluyendo notas a este trabajo durante el resto de su vida. Se convirtió en profesor de *l'École Polytechnique* de Paris in 1841 y posteriormente en la *Sorbonne* (1846). Miembro de pleno derecho de la *Académie des Sciences* desde 1839, fue elegido, así mismo, miembro de la *Royal Society* de Londres y de otras academias en Europa y los Estados Unidos y primer presidente de la *Société Mathématique* de Francia. Introduce muchas nociones enteramente nuevas desde su *Traité de géométrie supérieure* (1852), basado en una aproximación sintética –puramente geométrica, sin auxilio de números y métodos algebraicos– de la geometría proyectiva, usando transformaciones proyectivas, principio de dualidad (**Poncelet**, **Gergonne**), y continuidad (**Monge**, **Poncelet**) etc. y en su *Traité des sections coniques* (1865) lo aplica a las cónicas, campo en el que se convierte también en una referencia clásica. Publicó muchos de sus trabajos sobre curva alabeadas, secciones cónicas etc. en los *Annales* de Gergonne y en los *Journals* de Liouville. Existe un oscuro episodio, muy notorio y controvertido, que incluye su presentación a *l'Académie* de una propuesta, basada en parte de la correspondencia entre **Newton**, **Pascal**, y **Boyle**, que **Chasles** creía auténtica, según la cual **Pascal** fue el primero en proponer la ley de la gravitación universal.

Respecto a las características de forma sobre las generatrices, a ambos lados del punto central, se obtiene un resultado notable al medir la curvatura total o "de **Gauss**" $k_T = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}$ con $|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}$.

Teniendo en cuenta que en las superficies regladas **g = 0**, dicho índice puede escribirse:

$$k_T = -\frac{f^2}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|^2} = -\frac{f^{*2}}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|^4}$$

y puesto que $\underline{\dot{w}} \times \underline{d}_1$ tiene ahora la dirección de $\underline{\dot{d}_1}$, el parámetro de distribución toma el valor

$|f^*| = |(\underline{\dot{w}}, \underline{d}_1, \underline{\dot{d}_1})| = |(\underline{\dot{w}} \times \underline{d}_1).\underline{\dot{d}_1}| = |\underline{\dot{w}} \times \underline{d}_1|\,|\underline{\dot{d}_1}|$. Por otra parte

$$|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|^2 = ((\underline{\dot{w}} \times \underline{d}_1) + v(\underline{\dot{d}_1} \times \underline{d}_1))^2 = (\underline{\dot{w}} \times \underline{d}_1)^2 + v^2 |\underline{\dot{d}_1} \times \underline{d}_1|^2 + 2v(\underline{\dot{w}} \times \underline{d}_1)(\underline{\dot{d}_1} \times \underline{d}_1) = |\underline{\dot{w}} \times \underline{d}_1|^2 + v^2 |\underline{\dot{d}_1} \times \underline{d}_1|^2 =$$

$$= |\underline{\dot{w}} \times \underline{d}_1|^2 + v^2 |\underline{\dot{d}_1}|^2 = \frac{f^{*2}}{|\underline{\dot{d}_1}|^2} + v^2 |\underline{\dot{d}_1}|^2 = (\frac{f^{*2}}{|\underline{\dot{d}_1}|^4} + v^2)|\underline{\dot{d}_1}|^2, \text{ así que, finalmente:}$$

$$k_T = -\frac{f^{*2}}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|^4} = -\frac{f^{*2}}{(\frac{f^{*2}}{|\underline{\dot{d}_1}|^4} + v^2)^2 |\underline{\dot{d}_1}|^4} = -\frac{\frac{f^{*2}}{|\underline{\dot{d}_1}|^4}}{(\frac{f^{*2}}{|\underline{\dot{d}_1}|^4} + v^2)^2} = -\frac{h^2}{(h^2 + v^2)^2},$$

lo que demuestra que a lo largo de cualquier generatriz (**u=cte**), la curvatura total es idéntica a distancias "v" del punto central. En los puntos centrales, $\mathbf{v = 0}$, $\mathbf{k_T = -\dfrac{1}{h^2} = -\dfrac{|\dot{d}_1|^4}{f^{*2}}}$.

Como se ve, algunas fórmulas quedan simplificadas si se expresan respecto a la función **h=h(u)** en lugar de hacerlo con respecto a la **f *=f *(u)**. Por eso podemos encontrar la función **h=h(u)** definida como "parámetro de distribución" de la superficie, lo que desde el punto de vista práctico introduce más dificultades para su cálculo sin ninguna ventaja. Sobre cada generatriz **u=cte**, **f *** y **h** están relacionadas por el factor de escala $|\dot{\mathbf{d}}_1|^2$ y ambas funciones tienen los mismos signos, asi que $|\mathbf{h}|$ representa simplemente el cociente de módulos de los vectores $|\dot{\underline{w}}\times\underline{d}_1|$ y $|\dot{\underline{d}}_1|$:

$$|h| = \frac{f^*}{|\dot{\underline{d}}_1|^2} = \frac{|\dot{\underline{w}}\times\underline{d}_1||\dot{\underline{d}}_1|}{|\dot{\underline{d}}_1|^2} = \frac{|\dot{\underline{w}}\times\underline{d}_1|}{|\dot{\underline{d}}_1|} \quad\Rightarrow\quad h^2 = \frac{(\dot{\underline{w}}\times\underline{d}_1)(\dot{\underline{w}}\times\underline{d}_1)}{(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)(\dot{\underline{d}}_1\times\underline{d}_1)}.$$

La superficie **(−sen u, cos u, 0) + v {cos u, sen u, 1}**(1) tiene como parametrización canónica:

$$\underline{w} + v\,\underline{d}_1 = (-\mathrm{sen}\ u + \frac{1}{\sqrt{2}} v \cos u,\ \cos u + \frac{1}{\sqrt{2}} v\ \mathrm{sen}\ u,\ \frac{1}{\sqrt{2}} v),$$

puede comprobarse que los coeficientes de las dos primeras formas cuadráticas son idénticos a ambos lados de la línea de estricción (v =0) y a iguales distancias "v" de ella. Todos los índices y características geométricas de la superficie tales como las curvaturas principales son iguales en cada una de los dos sectores a iguales distancias sobre cada generatriz. Esta completa identidad es consecuencia de que la línea de estricción se encuentra en un plano de simetría de la superficie junto al hecho de que cualquier plano meridiano también resulta un plano de simetría. La normal a la superficie en cualquier punto "C" de la línea de estricción tiene la dirección del vector $\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{sen}\ u,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos u,\ 0\}$ –equivalente al vector $\dot{\underline{d}}_1$ –, varía a lo largo de la generatriz por **C** según el vector: $\{\frac{1}{2}(v\cos u - \sqrt{2}\ \mathrm{sen}\ u),\ \frac{1}{2}(\sqrt{2}\cos u - v\ \mathrm{sen}\ u),\ -\frac{1}{2}v\}$ hasta el límite $\{\frac{1}{2}\cos u,\ \frac{1}{2}\mathrm{sen}\ u,\ -\frac{1}{2}\}$ –que es la dirección del vector $\underline{d}_1\times\dot{\underline{d}}_1$ – formando con la normal en el punto "C" un ángulo: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u}}$, $\mathrm{tg}\ \alpha = v$.

El conoide **(0, u, 0) + v {1, 0, cos u}**(2) tiene como parametrización canónica:

$$\underline{w} + v\,\underline{d}_1 = (\frac{v}{\sqrt{1+\cos^2 u}},\ u,\ \frac{v\cos u}{\sqrt{1+\cos^2 u}}).$$

A ambos lados de la línea de estricción y a iguales distancias $\mathbf{v\neq 0}$ de la misma, resultan ser iguales los coeficientes **E**, **F** y **G**, (con **F=0**, **G =1**) y los **f**, **g** (con **g = 0**), siendo los valores de **e** iguales y de signos contrarios y por lo tanto, lo mismo ocurre para los $\mathbf{E\,G - F^2}$ y $\mathbf{e\ g - f^2}$; resultando que sobre cada generatriz, a ambos lados de la línea de estricción y a iguales distancias, son iguales las curvaturas totales mientras las curvaturas medias resultan opuestas. La normal en un punto "C" de la línea de estricción tiene como dirección:

$$\{\frac{\cos u}{\sqrt{1+\cos^2 u}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u}}\} \equiv \{\cos u,\ 0,\ -1\},$$

y a lo largo de la generatriz que pasa por **C**, en cualquiera de ambos sentidos (**v>0** ó **v<0**) la normal forma con esta dirección el ángulo $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\,(3+\cos 2u)}{\sqrt{2(3+\cos 2u)^2 + 8v^2\,\mathrm{sen}^2 u}}$, $\mathrm{tg}\ \alpha = 2\,\dfrac{\mathrm{sen}\ u}{3\cos 2u}\,v$, hasta la dirección límite:

$$\{0,\ 2\,\frac{\mathrm{sen}\ u}{3\cos 2u},\ 0\} \equiv \{0,\ 1,\ 0\}.$$

Finalmente, la superficie **(0, u, 0)** +v **{1, −1, u²}**(3) tiene como parametrización canónica:

$$\underline{w} + v\ \underline{d}_1 = \left(-\frac{u}{4}+\frac{v}{\sqrt{2+u^4}},\ \frac{5u}{4}-\frac{v}{\sqrt{2+u^4}},\ -\frac{u^3}{4}+\frac{v\,u^2}{\sqrt{2+u^4}}\right).$$

A ambos lados de la línea de estricción tiene los mismos coeficientes **E**, **F** y **G**, **E G** $-\mathbf{F}^2$,(con **G** =**1**), y los **f**, **g** (con **g** = **0**), siendo los valores de **e** distintos. La normal en un punto "**C**" de la línea de estricción tiene como dirección:

$$\left\{\frac{u^2}{2\sqrt{2+u^4}},-\frac{u^2}{2\sqrt{2+u^4}},-\frac{1}{\sqrt{2+u^4}}\right\}\equiv\{u^2,-u^2,-2\},$$

y a lo largo de la generatriz que pasa por **C**, en cualquiera de ambos sentidos (**v>0** ó **v<0**) la normal forma con esta dirección el ángulo $\cos\alpha=\frac{2+u^4}{\sqrt{(2+u^4)^2+16u^2v^2}}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 4\frac{u}{2+u^4}v$, hasta la dirección límite **{1, 1, 0}**.

§ 12.- Las superficies desarrollables. Cilindros, conos y superficies tangenciales. Puntos singulares. La arista de retroceso.

Las superficies regladas descritas en cualquiera de sus parametrizaciones propias $\underline{D}$ **(u)**+v $\underline{d}$ **(u)**, en las que se verifica $f^*(u) = (\dot{\underline{D}}(u), \underline{d}(u), \dot{\underline{d}}(u)) \equiv 0$ se han clasificado como superficies desarrollables entre las que se han incluido los cilindros ($\underline{d}$= **cte** , $\dot{\underline{d}}$=**0**) y los conos($\underline{D}$ = **cte** , $\dot{\underline{D}}$=**0**). Puesto que $\underline{d}(u) \neq 0$, la anulación de **f*** incluiría, en principio, tres casos particulares más:

$\dot{\underline{D}}(u)=\lambda(u)\,\underline{d}(u)$, $\quad\dot{\underline{D}}(u)=\mu(u)\,\dot{\underline{d}}(u)$, $\quad\dot{\underline{d}}(u)=\rho(u)\,\underline{d}(u)$,

con **λ(u)**, **μ(u)**, **ρ(u)**, funciones escalares no nulas, aunque eventualmente puedan anularse para algún valor del parámetro "**u**". Finalmente quedaría el caso más general en que no siendo colineales dos a dos, los tres vectores $\dot{\underline{D}},\underline{d},\dot{\underline{d}}$ son, sin embargo, linealmente dependientes o coplanarios.

Estas superficies desarrollables poseen propiedades comunes específicas – formales y geométricas – entre las que podemos destacar en primer lugar el carácter de todos sus puntos o la disposición del haz de planos tangentes a lo largo de cualquiera de sus generatrices.

Puesto que en cualquier superficie reglada $\underline{r}$ **(u, v)** –representada en su forma lineal en "**v**"– es **g*=0**, se verifica en todos sus puntos $e^*g^* - f^{*2} = -f^{*2}$. Siendo en las desarrollables, además, **f *=0**, se verificará que $e^*g^*-f^{*2}=0$, así que todos sus puntos son parabólicos o excepcionalmente planos y sus generatrices son todas "cilíndricas". Si nos conservamos dentro de la descripción propia de las superficies regladas, la proposición recíproca se verifica trivialmente. Sin embargo esta proposición recíproca tiene un alcance más amplio ya que cualquier superficie parametrizada cuyos puntos sean todos parabólicos o planos es necesariamente una superficie desarrollable.

Examinando ahora la dirección de la normal a una superficie desarrollable a lo largo de cualquiera de sus generatrices, nos encontramos con que los vectores no nulos $\dot{\underline{D}},\underline{d},\dot{\underline{d}}$ son coplanarios, por lo que los productos vectoriales de cualesquiera dos de ellos tienen la misma dirección. En la expresión de la normal a la superficie definida por el vector $\underline{r}_u \times \underline{r}_v = (\dot{\underline{D}} + v\,\dot{\underline{d}})\times\underline{d} = (\dot{\underline{D}}\times\underline{d}) + v\,(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})$, los vectores $(\dot{\underline{D}}\times\underline{d})$ y $(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})$ tienen la misma dirección constante a lo largo de cualquier generatriz **u=cte**. Este vector puede, en general, variar su módulo pero conserva su dirección invariable. Consecuentemente, el plano tangente en cualquier punto de la generatriz –que la contiene– es el mismo y el haz de planos tangentes a lo largo de la misma se convierte en un plano único. Esta propiedad, cuando afecta a todas las generatrices de una superficie reglada también se convierte en privativa de las superficies desarrollables.

En las figuras 25 y 26 se ha representado gráficamente esta disposición sobre las superficies desarrollables **(cos u–v sen u, sen u+v cos u, u+v)**–fig. 25– y **(v, u²–1, u (u²–1))**–figura 26–, eligiendo arbitrariamente las generatrices **u = 0** y **u = –0,45**, respectivamente, y representando, a escala, la variación de $\underline{r}_u \times \underline{r}_v$ en diferentes puntos de cada generatriz. Se observa que en el caso del cilindro ni siquiera varia el módulo de este vector, y en cualquiera de los casos, el haz de planos tangentes a la superficie se convierte en un plano único.

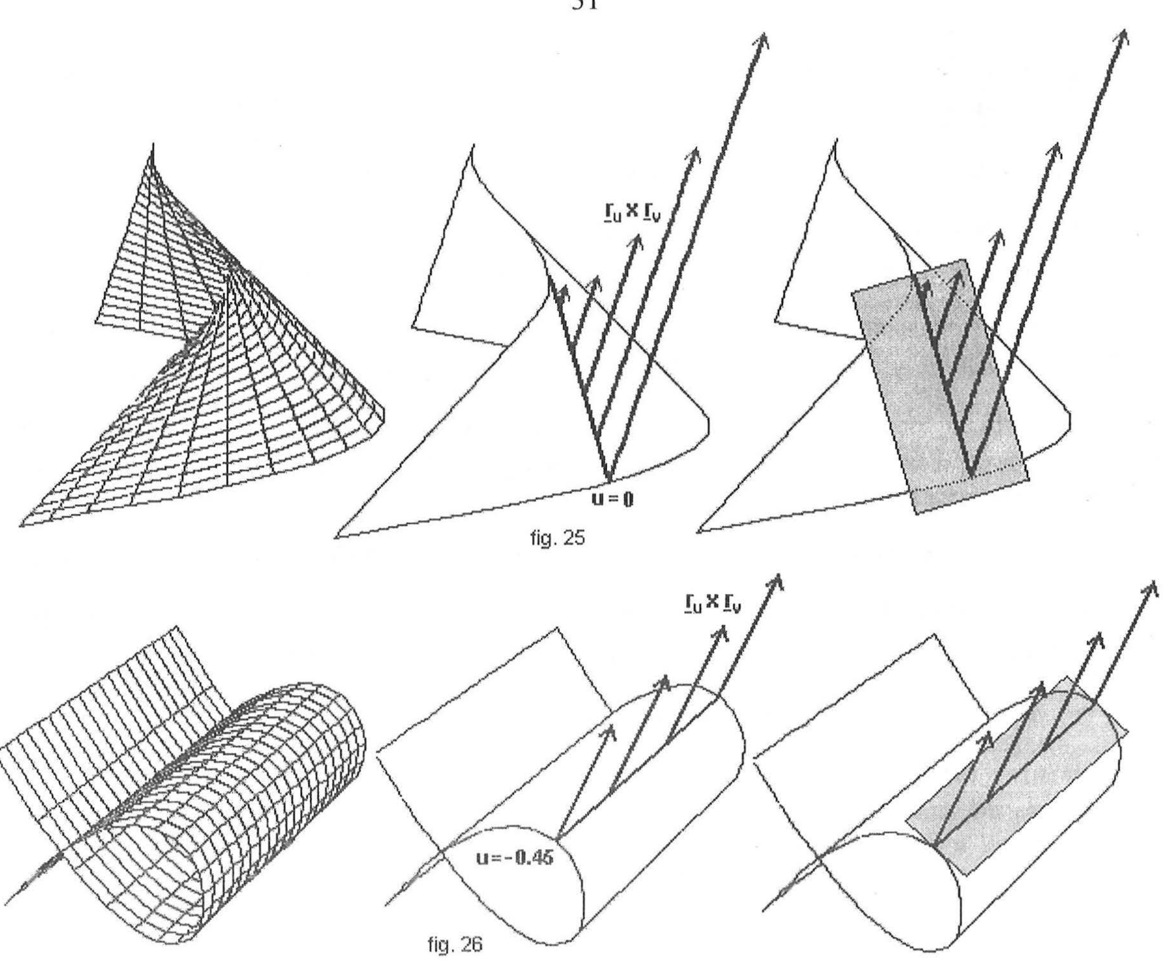


fig. 25

fig. 26

Para describir ahora los distintos casos particulares y el caso general en que se verifica $\mathbf{f^*=0}$, adoptaremos de nuevo la parametrización equivalente $\underline{D}(u) + v\,\underline{d}_1(u)$ para simplificar el análisis.

En estas condiciones y puesto que $\underline{d}_1 \neq 0$ y $\dot{\underline{d}}_1$ es perpendicular a $\underline{d}_1$, los casos particulares se reducen a dos:

$\dot{\underline{D}}(u)=\lambda(u)\,\underline{d}_1(u)$, $\qquad$ $\dot{\underline{D}}(u)=\mu(u)\,\dot{\underline{d}}_1(u)$,

con $\lambda(u)\neq 0$, $\mu(u)\neq 0$, aunque eventualmente las funciones λ y μ puedan anularse para algún valor de "**u**". Ambos casos pueden investigarse desde el caso general:

$$\dot{\underline{D}}(u)=\lambda(u)\,\underline{d}_1(u)+\mu(u)\,\dot{\underline{d}}_1(u), \qquad (5)$$

que muestra la dependencia lineal de los vectores involucrados y que incluyen los casos anteriores para $\lambda(u)=0$, $\mu(u)=0$, respectivamente. Examinaremos inmediatamente este caso general, pero nos detendremos primero en dar nombre al caso particular: $\dot{\underline{D}}(u)=\lambda(u)\,\underline{d}(u)$ con $\lambda(u)\neq 0$, en el que podremos representar la superficie en la forma $\underline{D}(u) + v\,\dot{\underline{D}}(u)$, puesto que los vectores $\dot{\underline{D}}$ y $\underline{d}$ son equivalentes. En este caso la superficie resulta generada por las tangentes a la directriz $\underline{D}(u)$, de dirección $\dot{\underline{D}}(u)$, y se denomina "**superficie de desarrollo tangencial**" de la curva $\underline{D}$, o simplemente superficie "**tangencial**" de $\underline{D}$.

Volviendo al caso general en que la superficie reglada descrita en la forma $\underline{D}(u) + v\,\underline{d}_1(u)$, verifica la ecuación $_{(5)}$; consideraremos que $\mu(u)\neq 0$ ($\mu(u) = 0$ corresponde al caso de las superficies tangenciales vistas anteriormente). Según $_{(5)}$ la superficie verificará $\dot{\underline{D}}.\underline{d}_1=\mu\,\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1$, así que su línea de estricción según $_{(3.2)}$ será:

$$\underline{w} = \underline{D} - \frac{\dot{\underline{D}}.\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1.\dot{\underline{d}}_1}\,\underline{d}_1 = \underline{D} - \mu\ \underline{d}_1 .$$

Las tangentes a esta curva tendrán como dirección la del vector $\dot{\underline{w}}$ y podrá escribirse:

$$\dot{\underline{w}} = \dot{\underline{D}} - \dot{\mu}\,\underline{d}_1 - \mu\ \dot{\underline{d}}_1 = \lambda\,\underline{d}_1 + \mu\ \dot{\underline{d}}_1 - \dot{\mu}\,\underline{d}_1 - \mu\ \dot{\underline{d}}_1 = (\lambda - \dot{\mu})\ \underline{d}_1 , \qquad (6)$$

con lo que esta dirección es la de las tangentes a la curva $\underline{w}$. Tomando la línea de estricción como directriz de la representación, la superficie podrá parametrizarse en la forma intrínseca $\underline{w}$ +v $\dot{\underline{w}}$ y la superficie resultará ser una desarrollable tangencial de $\underline{w}$. Se deduce de todo ello que las superficies desarrollables que no son cilindros ($\dot{\underline{D}}$(u)=0), ni conos ($\dot{\underline{d}}_1$(u)=0), son superficies de desarrollo tangencial de su línea de estricción. Esta conclusión es válida en el ámbito de las superficies que estamos considerando aquí, sin entrar en otros posibles campos donde las condiciones sean distintas. Obsérvese que si **λ(u)=0**, esta disposición $_{(6)}$ se conserva.

Existen otros casos particulares que nos conducen a los cilindros o los conos; por ejemplo, si **μ=cte** y **λ= 0**, se verifica $\dot{\underline{D}} = \mu\ \dot{\underline{d}}_1$, con **μ=cte**, por lo que $\underline{D} = \mu\ \underline{d}_1 + \underline{a}$, con $\underline{a}$=**cte**, así que $\mu\ \underline{d}_1 = \underline{D} - \underline{a}$, y podemos representar la superficie en la forma $\mu\ \underline{d}_1 + \underline{a} + v\ \underline{d}_1 = \underline{a} + (v+\mu)\ \underline{d}_1 = \underline{a} + v^*\ \underline{d}_1$, con lo que la superficie se convierte en un cono de vértice $\underline{a}$, proporcionando en la ecuación $_{(6)}$ el resultado: $\dot{\underline{w}} = \dot{\underline{w}}$**(u)=0.** Así mismo, si **λ(u)=μ(u)=0** ($\dot{\underline{D}}$(u)=$\dot{\underline{w}}$(u)=0) la superficie se convierte, trivialmente, en un cono de vértice $\underline{D}$.Circunstancialmente existen, además, diferentes casos en los que localmente las funciones **λ** o **μ** pueden anularse para algunos de los valores del parámetro "**u**" que no afectan al caso general.

Esta última clasificación de las superficies desarrollables en cilindros, conos y superficies de desarrollo tangencial podía habernos sido sugerida desde el resultado $_{(3.6)}$ del § 9: $\dot{\delta} = \frac{(\dot{\underline{D}},\underline{d}_1,\dot{\underline{d}}_1)}{|\dot{\underline{d}}_1|} = \frac{f^*}{|\dot{\underline{d}}_1|}$, donde **δ** representaba la distancia mínima entre dos generatrices próximas. Podemos interpretar ahora este resultado en el contexto de las superficies desarrollables en las que al ser f*=($\dot{\underline{D}}$, $\underline{d}$, $\dot{\underline{d}}$) = 0 se deberá verificar $\dot{\delta}$=0, encontrando dos casos triviales para la anulación de $\dot{\delta}$ que son **δ=0** y **δ=cte**; el primero correspondiente a los conos y el segundo a los cilindros. La tercera posibilidad en la cual $\frac{\Delta\delta}{\Delta u}_{u\to\infty}$=0, sin que **δ** sea constante o nulo, es el caso en que las generatrices sean tangentes a una curva. Este tercer caso se corresponde ahora con las superficies de desarrollo tangencial de la curva directriz que se convertirá en línea de estricción de la superficie.

Describiremos finalmente, algunas cuestiones en torno a los puntos singulares de las superficies desarrollables desde un punto de vista general considerando cualquier parametrización de la misma $\underline{D}$ (u)+v $\underline{d}$ (u) en la que **f*(u) =($\dot{\underline{D}}$ (u), $\underline{d}$(u), $\dot{\underline{d}}$ (u))=0** y supondremos en primer lugar que $\underline{d}$ **(u)≠0** para cualquier valor del parámetro "**u**" y que no existen puntos singulares en la directriz tomada para la representación como tal curva de $\Re^3$, esto es: $\dot{\underline{D}}$ **(u)≠0** para todos los valores de "**u**". En estas condiciones, siendo $\underline{r}_u = \dot{\underline{D}}$ (u)+ v $\dot{\underline{d}}$(u) y $\underline{r}_v = \underline{d}$ (u), el vector $\underline{r}_u \times \underline{r}_v = (\dot{\underline{D}} + v\ \dot{\underline{d}}) \times \underline{d} = (\dot{\underline{D}} \times \underline{d}) + v\ (\dot{\underline{d}} \times \underline{d})$ representa la suma de dos vectores paralelos ($\dot{\underline{D}} \times \underline{d}$) y v($\dot{\underline{d}} \times \underline{d}$) así que podrá anularse en los puntos en los que ambos tengan módulos iguales y direcciones contrarias. Si, asi mismo, el vector $\dot{\underline{d}} \times \underline{d}$ no se anula para ningún valor de "**u**", la anulación de $\underline{r}_u \times \underline{r}_v$ ocurrirá, trivialmente, cuando ($\dot{\underline{D}} \times \underline{d}$).($\dot{\underline{d}} \times \underline{d}$)+v ($\dot{\underline{d}} \times \underline{d}$).($\dot{\underline{d}} \times \underline{d}$)=0 que se verificará para valores $v = -\frac{(\dot{\underline{D}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}{(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})} = v_C$, o sea para valores de **v** que determinan sobre la superficie una curva que es justamente su línea de estricción, lugar de los

puntos centrales de la superficie $\underline{w} = \underline{D} - \frac{(\dot{\underline{D}} \times \underline{d})(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})}{(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})} \underline{d}$. Se deduce de aquí que los puntos centrales de una superficie desarrollable son todos singulares. Esto nos confirma, trivialmente, que el vértice de un cono es un punto singular de la superficie y que la línea de estricción de la desarrollable tangencial de una curva – cuyas rectas tangentes son las generatrices – se convierte en una línea de puntos singulares de la superficie aunque se trate de una curva completamente regular como tal curva de $\Re^3$.

Los valores de "**u**" que pueden anular a $\dot{\underline{d}}$**(u)** no permiten la deducción del resultado anterior pero claramente en esos puntos $\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \dot{\underline{D}} \times \underline{d}$, que no es nulo si ninguno de los valores de "**u**" anulan a los vectores $\dot{\underline{D}}$ o $\underline{d}$ por lo que en este caso no se trasmiten singularidades a la superficie.

Si existen valores de "**u**" que anulen a $\underline{d}$ debido a una presentación incorrecta de este vector, estos valores proporcionan, trivialmente, generatrices de puntos singulares en las superficies. Sobre esta circunstancia ya se incluyó una nota en el §2 y debe de ser evitada tomando el correspondiente vector equivalente en la representación paramétrica en el cual $\underline{d}$ no se anule.

Finalmente, los puntos singulares de la directriz, es decir, los determinados por valores de "**u**" que anulen –localmente– a $\dot{\underline{D}}$ se pueden trasmitir a la superficie de dos maneras:

a) $(\dot{\underline{D}} \times \underline{d}) + v\,(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})$ será nulo en puntos aislados en los que **v=0** si $\dot{\underline{d}} \neq 0$ para tal valor de "**u**".

b) Existirán generatrices de puntos singulares en los valores de "**u**" que anulen simultáneamente a $\dot{\underline{D}}$ y $\dot{\underline{d}}$.

Conos, cilindros y superficies tangenciales forman así los tres grupos contemplados de superficies desarrollables que vamos a describir brevemente con algunas de sus características más significativas.

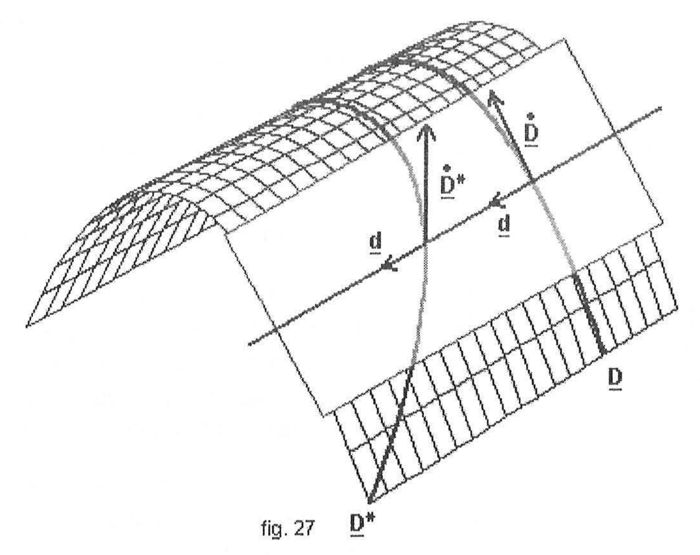


fig. 27

Cilindros

Tomada cualquier curva $\underline{D}$**(u)** como directriz, la representación reglada de un cilindro de generatrices paralelas a la dirección $\underline{d} = \{\alpha, \beta, \gamma\} =$ **cte**, toma la forma:

$\underline{D}(u) + v\,\{\alpha, \beta, \gamma\}$ con $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \neq 0$.

Siendo en los cilindros $\dot{\underline{d}} = 0$, la dirección de la normal a la superficie vendrá definida por $\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \dot{\underline{D}} \times \underline{d}$, vector dependiente de "**u**" que no cambia su módulo ni su dirección a lo largo de cualquier generatriz **u=cte**. El plano tangente queda determinado por los vectores $\dot{\underline{D}}$ y $\underline{d}$. En la figura 27, se representa una bóveda con dos posibles directrices $\underline{D}$ y $\underline{D}$ * y el plano tangente a lo largo de una de sus generatrices.

El conjunto de planos tangentes a la superficie se reduce a una familia simple de planos con una dirección común $\underline{d}$ y la superficie se convierte en envolvente de esta familia de planos.

De la expresión del vector $\underline{r}_u \times \underline{r}_v$ se deduce también que si la directriz no es una recta de dirección $\underline{d}$ –en cuyo caso la superficie degeneraría en una recta–, los únicos puntos singulares de la superficie son los que aporta la propia directriz $\underline{D}$ tomada en la representación (puntos en los que $\dot{\underline{D}}$**(u)=0**), así que si la curva directriz es regular, en los cilindros no existen puntos singulares.

Las parametrizaciones regladas de los cilindros los manifiestan explícitamente como tales. Si en los cilindros cambiamos la directriz de la representación tomando otra curva $\underline{D}$ * que corte a todas las generatrices, la

nueva representación sigue manteniendo explícitamente su carácter de superficie cilíndrica: **D** *(u)+v {α, β, γ}, así que no parece necesario insistir en este aspecto con algunos ejemplos. Por otra parte, el cálculo de la línea de estricción a través de cualquiera de las fórmulas alternativas queda indeterminado. No existiendo puntos centrales, los singulares, si existen, no tienen ninguna relación estructural con ellos. Aunque resulte obvio, se puede añadir que es posible construir cilindros con generatrices de puntos singulares debidos a la parametrización elegida como ocurre, sin ir más lejos, tomando como directriz de la bóveda de cañón de la figura 27 la curva $(u^2, u^3, 1-u^6)$ (figura 28(a)) y, desde luego, construir cilindros con generatrices de puntos singulares intrínsecos eligiendo adecuadamente la directriz (figura 28(b)).

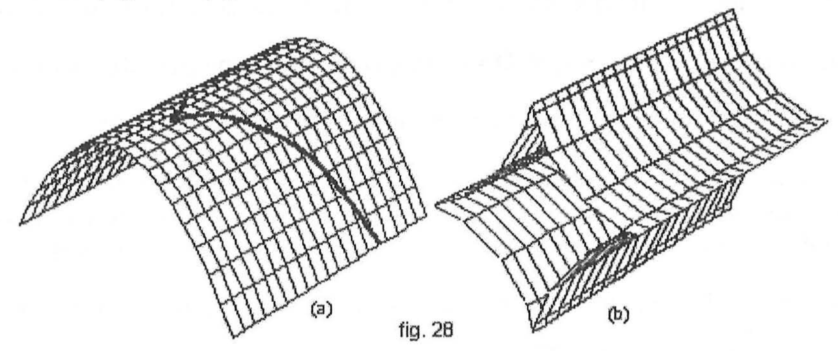


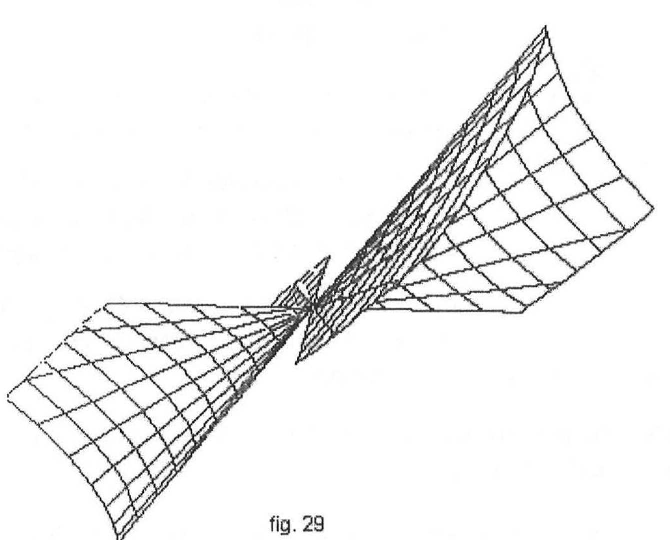
fig. 28

Conos

En un cono, todas las generatrices se cortan en un punto **(a, b, c)** – vértice –, que es en lo que degenera la línea de estricción. Podemos tomarlo como directriz **D** ={ a, b, c}= cte, obteniendo la parametrización reglada:
(a, b, c) + v **d** (u),

siendo **d** (u) el campo de direcciones de las generatrices. Es en estas condiciones en las que $\dot{\mathbf{D}}=0$.

La dirección de la normal al cono la determinará él vector $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = v\,(\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{d})$ que cambia su módulo pero no su dirección a lo largo de una generatriz **u=cte**. El plano tangente queda determinado en cada uno de los puntos de cada generatriz por los vectores **d** y $\dot{\mathbf{d}}$ y el conjunto de planos tangentes a la superficie resulta ser una familia simple de planos con un punto común (el vértice). Los conos se convierten así en envolventes de una familia de planos con un punto común.


fig. 29

Siendo $\mathbf{d}(u) \neq 0$, si el vector $\dot{\mathbf{d}}(u) \neq 0$ y no se verifica $\dot{\mathbf{d}}(u) = \lambda(u)\ \mathbf{d}(u)$ – lo que convertiría a la superficie en un cilindro que se haría explícito con un cambio de parámetro –, se obtiene el vértice **v= 0** como punto singular, más, eventualmente, otras posibles generatrices de puntos singulares para valores de "**u**" que anulen la función vectorial $\dot{\mathbf{d}}(u)$ como le ocurre al fragmento de cono
$(v\,u^3, v-1, v(1-u^2)-1)$
de la figura 29. Si este campo de direcciones verifica $\dot{\mathbf{d}}(u) \neq 0$ para todos los valores de "**u**", entonces el punto singular de la superficie es el vértice, único punto central.

El carácter de superficie cónica se hace evidente cuando la directriz tomada es el vértice, pero existen diferentes parametrizaciones que pueden disfrazar este carácter ya que podemos elegir sobre el cono diferentes curvas –que corten a todas las generatrices– tomándolas como directriz de la representación. En estas condiciones, para distinguir esta superficie como un cono y obtener su vértice el método más simple es acudir al cálculo de la línea de estricción; si tal línea se reduce a un punto, la superficie, trivialmente, es un cono y este punto su vértice. Este cálculo nos permite recuperar su parametrización intrínseca.

Disponiendo de la parametrización intrínseca de un cono, podemos encontrar diferentes curvas sobre la superficie que pueden servir como directriz de nuevas representaciones, eligiendo diferentes funciones $\mathbf{v=v(u)}$:

$\underline{\mathbf{D}}^*\mathbf{=(a,\ b,\ c)+v(u)}\ \underline{\mathbf{d}}\,\mathbf{(u)}$,

y representar el cono en la forma $\underline{\mathbf{D}}^*\mathbf{+\ v}\ \underline{\mathbf{d}}\,\mathbf{(u)}$ que no está referida a su vértice y que nos permite, de nuevo, encontrar otras directrices, con $\mathbf{v=\eta(u)}$, lo que a su vez, nos habilita nuevas parametrizaciones ...etc, proceso que permite explicar este "encubrimiento".

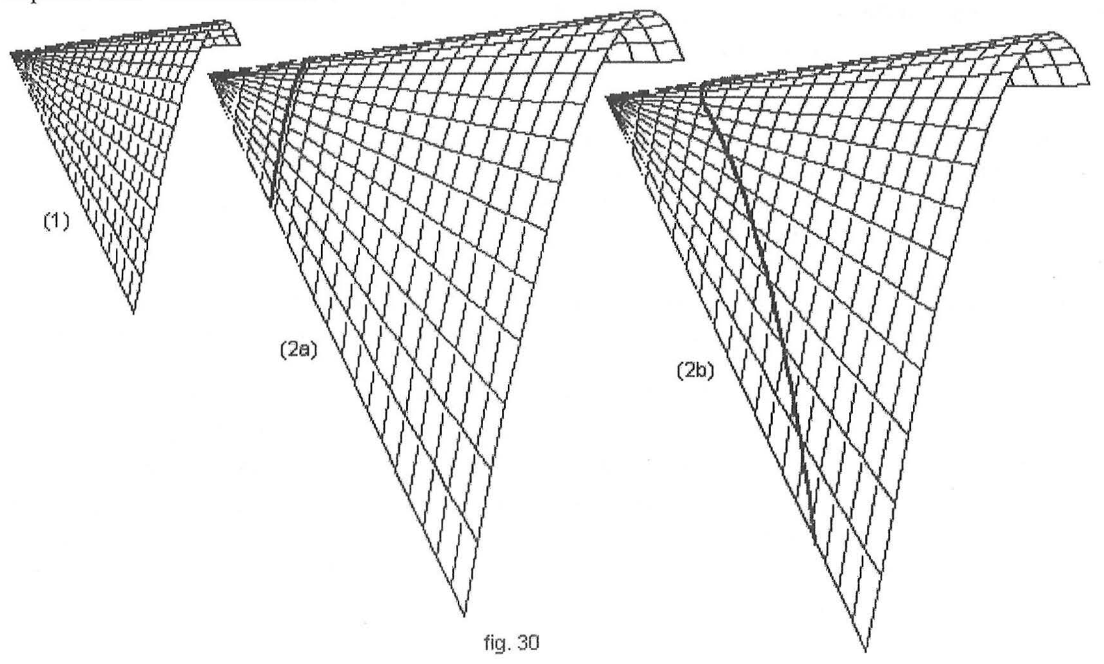


fig. 30

Tomemos por ejemplo como punto de partida la representación del cono:

$\mathbf{(0,-2,\ 0)+v\ \{u,\ 2,\ 1-u^2\}}$, (figura 30(1)).

Con $\mathbf{v=1}$, obtenemos la directriz $\mathbf{(0,-2,\ 0)+\{u,\ 2,\ 1-u^2\}=(u,\ 0,\ 1-u^2)}$, (figura 30(2a)), y la representación:

$\mathbf{(u,\ 0,\ 1-u^2)+v\ \{u,\ 2,\ 1-u^2\}}$,

de aquí podemos ahora, con $\mathbf{v=u^2}$, encontrar la nueva directriz $\mathbf{(u,\ 0,\ 1-u^2)+u^2\ \{u,\ 2,\ 1-u^2\}=(u(1+u^2),\ 2\,u^2,\ 1-u^4)}$, (figura 30(2b)), y con ella, la nueva representación:

$\mathbf{(u(1+u^2),\ 2\,u^2,\ 1-u^4)+v\ \{u,\ 2,\ 1-u^2\}=((1+u^2+v)\,u,\ 2(u^2+v),\ 1-u^4+v(1-u^2))}$,

parametrización que dificulta el reconocimiento inmediato de la superficie. Para comprobar su carácter desde esta última representación bastará obtener su línea de estricción; con $\dot{\underline{\mathbf{D}}}\mathbf{=\{1+3u^2,\ 4\,u,\ -4u^3\}}$, $\dot{\underline{\mathbf{d}}}\mathbf{=\{1,\ 0,\ -2u\}}$, y los productos vectoriales:

$$\dot{\underline{D}}\times\underline{d}=\begin{vmatrix}1+3u^2 & 4u & -4u^3\\ u & 2 & 1-u^2\end{vmatrix}=\{4\,u^3+4\,u,\ -u^4-2\,u^2-1,\ 2\,u^2+2\},\qquad \dot{\underline{d}}\times\underline{d}=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2u\\ u & 2 & 1-u^2\end{vmatrix}=\{4\,u,\ -u^2-1,\ 2\},$$

se obtienen los escalares: $(\dot{\underline{D}}\times\underline{d}).(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})=u^6+19\,u^4+23\,u^2+5$, $(\dot{\underline{d}}\times\underline{d}).(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})=u^4+16\,u^3+2\,u^2+4$,

y el cociente $\dfrac{(\dot{\underline{D}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}{(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}=\dfrac{u^6+19u^4+23u^2+5}{u^4+16u^3+2u^2+4}=u^2+1$, así que la línea de estricción resultará ser:

$$\underline{w}=\underline{D}-\frac{(\dot{\underline{D}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}{(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}\,\underline{d}=(u(1+u^2),\ 2\,u^2,\ 1-u^4)-(u^2+1)\ \{u,\ 2,\ 1-u^2\}=(0,\ -2,\ 0),$$

comprobamos así que la parametrización es la de un cono de vértice $\mathbf{(0,\ -2,\ 0)}$ y podemos recuperar su representación intrínseca $\underline{\mathbf{w}}\mathbf{+v}\ \underline{\mathbf{d}}\mathbf{=(0,-2,\ 0)+v\ \{u,\ 2,\ 1-u^2\}}$.

Tangenciales

Una superficie de desarrollo tangencial de la curva – alabeada – $\underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u})$, puede representarse de forma intrínseca por la parametrización:

$$\underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u})+\mathbf{v}\;\underline{\dot{\mathbf{D}}}\,(\mathbf{u}),$$

cuya línea de estricción, $\underline{\mathbf{w}} \equiv \underline{\mathbf{D}}$, es la propia directriz de la desarrollable.
La dirección de la normal a la superficie la determina el vector

$$\underline{\mathbf{r}}_u \times \underline{\mathbf{r}}_v = \mathrm{v}\,(\underline{\ddot{\mathbf{D}}} \times \underline{\dot{\mathbf{D}}}),$$

que cambia de módulo a lo largo de cualquier generatriz **u=cte** pero cuya dirección es constantemente la de la binormal a la directriz en el punto de intersección de ambas en la forma representada en la figura 25. Consecuentemente el plano tangente – que no varía a lo largo de los puntos de cada generatriz – es el plano osculador de la curva $\underline{\mathbf{D}}$ y la superficie se convierte en envolvente de la familia simple de los planos osculadores de la directriz. Cuando $\underline{\ddot{\mathbf{D}}}\,(\mathbf{u})\times\underline{\dot{\mathbf{D}}}\,(\mathbf{u})$ es la función nula, la superficie degenera en una recta. Si $\underline{\ddot{\mathbf{D}}}\,(\mathbf{u})\times\underline{\dot{\mathbf{D}}}\,(\mathbf{u})=\mathbf{cte}$, la curva es plana y la desarrollable degenera en un plano así que para construir estas superficies deberemos considerar $\underline{\mathbf{D}}$ una curva alabeada en la que $(\underline{\dot{\mathbf{D}}}, \underline{\ddot{\mathbf{D}}}, \underline{\dddot{\mathbf{D}}}) \neq \mathbf{0}$. La directriz $\underline{\mathbf{D}}$ se convierte así en el lugar geométrico de los puntos centrales y, al mismo tiempo, en lugar de puntos singulares de la superficie ya que cuando **v= 0** $\Rightarrow$ $\underline{\mathbf{r}}_u \times \underline{\mathbf{r}}_v = \mathbf{0}$. Esto último puede parecer, en principio, sorprendente porque la directriz puede ser completamente regular como curva de $\mathfrak{R}^3$ y esta circunstancia permite adivinar un singular comportamiento de la superficie en los puntos de la directriz del desarrollo y sus entornos que inmediatamente describiremos. Eventualmente, además de los puntos centrales, pueden existir generatrices de puntos singulares para valores de "**u**" que anulen el producto $\underline{\ddot{\mathbf{D}}}\,(\mathbf{u})\times\underline{\dot{\mathbf{D}}}\,(\mathbf{u})$ – que si no son singulares como puntos de tal curva, son puntos de inflexión –.

Para comprender la estructura de la superficie en una región que contenga a la directriz a ambos lados de la misma, podemos obtener secciones de la superficie preferentemente que contengan a su binormal – exceptuando el plano rectificante –, o a su normal principal – exceptuando el osculador –, y entre todas ellas, como más representativa, la sección por el plano normal de la curva en cada uno de sus puntos.
Considerando la directriz $\underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u})$ en un punto $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0$, el plano normal a la curva $\underline{\mathbf{p}}=\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ satisfará:

$$\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot(\underline{\mathbf{p}}-\underline{\mathbf{D}}_0)=\mathbf{0},$$

y la curva intersección de la superficie podrá obtenerse determinando **v =v(u)** de la ecuación:

$$\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot(\underline{\mathbf{D}}+\mathrm{v}\;\underline{\dot{\mathbf{D}}}-\underline{\mathbf{D}}_0)=\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\mathbf{D}}+\mathrm{v}\;\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\dot{\mathbf{D}}}-\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\mathbf{D}}_0=\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{v}=-\frac{\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0(\underline{\mathbf{D}}-\underline{\mathbf{D}}_0)}{\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\dot{\mathbf{D}}}},$$

por lo que podrá representarse por

$$\underline{\mathbf{c}}\,(\mathbf{u})=\underline{\mathbf{D}}-\frac{\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0(\underline{\mathbf{D}}-\underline{\mathbf{D}}_0)}{\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\dot{\mathbf{D}}}}\,\underline{\dot{\mathbf{D}}},$$

siendo $\underline{\dot{\mathbf{c}}}\,(\mathbf{u})=\underline{\dot{\mathbf{D}}}-\dfrac{(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\dot{\mathbf{D}}})(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\dot{\mathbf{D}}})-(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\ddot{\mathbf{D}}})((\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\mathbf{D}})-(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\mathbf{D}}_0))}{(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\dot{\mathbf{D}}})^2}\,\underline{\dot{\mathbf{D}}}-\dfrac{(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\mathbf{D}})-(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\mathbf{D}}_0)}{(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\dot{\mathbf{D}}})}\,\underline{\ddot{\mathbf{D}}}=$

$$=\frac{(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\ddot{\mathbf{D}}})(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\mathbf{D}})-(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\ddot{\mathbf{D}}})(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\mathbf{D}}_0)}{(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\dot{\mathbf{D}}})^2}\,\underline{\dot{\mathbf{D}}}-\frac{(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\mathbf{D}})-(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\mathbf{D}}_0)}{(\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\cdot\underline{\dot{\mathbf{D}}})}\,\underline{\ddot{\mathbf{D}}},$$

que verifica $\underline{\dot{\mathbf{c}}}\,(\mathbf{u})=\mathbf{0}$ para $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0$ y $\underline{\ddot{\mathbf{c}}}_0\neq\mathbf{0}$ ($\underline{\dot{\mathbf{D}}}_0\neq\mathbf{0}$, $\underline{\ddot{\mathbf{D}}}_0\neq\mathbf{0}$. $\underline{\dddot{\mathbf{D}}}_0\neq\mathbf{0}$), así que $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0$ es un punto singular de retroceso de esta curva y esto se verificará para otras secciones que no contengan al vector $\underline{\dot{\mathbf{D}}}$; no lo será, por ejemplo, en la sección por el plano que contiene a $\underline{\dot{\mathbf{D}}}$ y a $\underline{\ddot{\mathbf{D}}}$ – rectificante de la curva –.

Esto muestra que la curva directriz $\underline{D}$ **(u)** es una curva de puntos de retroceso de las secciones de la superficie por planos que no contienen a su tangente y se convierte en curva de encuentro de dos hojas de la superficie –generada por sus propias tangentes–, cada una de ellas determinada por las generatrices a cada uno de sus lados **v>0, v<0**. Estas secciones presentan en los puntos centrales de la superficie dos "ramas"o arcos, uno a cada lado del plano osculador de la curva; la traza entre el plano osculador de la curva y el de sección es una tangente común a ambas ramas, y el punto de la curva interceptado es por lo tanto un punto de retroceso de la sección. Los dos haces de planos tangentes a la superficie en los puntos de cada una de las ramas tienen un elemento común, que es el osculador de la directriz que las limita, así que el propio plano osculador de la curva es un plano de retroceso de los planos tangentes a la superficie en cada uno de los puntos de la sección considerada. Debido a estas razones, para describir la línea de estricción de estas superficies tangenciales se utiliza el nombre alternativo de "**arista de retroceso**". Así, podemos decir que la línea de estricción de una superficie reglada se transforma en una arista curva "de retroceso" de la superficie cuando las generatrices se convierten en sus tangentes.

En los conos la "arista de retroceso" se reduce, trivialmente, a un punto que es su vértice, y en los cilindros carece de sentido hablar de arista de retroceso. En parametrizaciones de conos y superficies tangenciales en su forma lineal, en las que sea utilizada como directriz una curva que no sea ni el vértice ni la directriz del desarrollo, respectivamente, la obtención de la arista de retroceso nos permite, como alternativa a la investigación directa de sus puntos singulares, conocer si la desarrollable es realmente un cono o una desarrollable tangencial, y describir la desarrollable con su representación intrínseca que explícitamente nos muestra qué superficie estamos considerando.

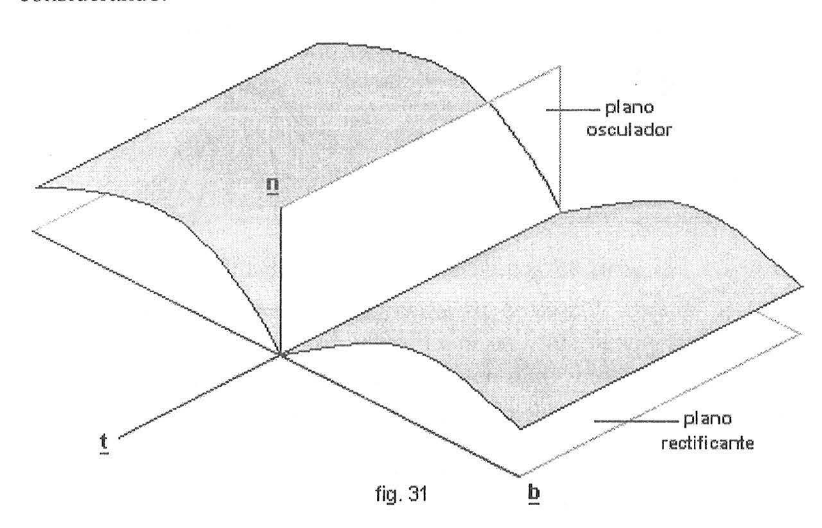


fig. 31

Para hacernos una idea espacial de la estructura de la superficie desarrollable tangencial con respecto a su línea de estricción, podemos imaginar en cada punto de la directriz $\underline{D}$, un cilindro cuya traza sea la intersección del plano normal a $\underline{D}_0$ con la superficie, teniendo a $\dot{\underline{D}}_0$ como dirección de sus generatrices. El resultado sería el de las dos hojas de un libro abierto como muestra la figura 31. Puede, no obstante, comprenderse con más claridad si observamos algunas de las secciones indicadas sobre un ejemplo representativo.

Consideramos, por ejemplo, la superficie tangencial de la hélice circular **(cos u, sen u, u)** que reconocemos como un helicoide desarrollable (figura 32):

(cos u, sen u, u)+v{–sen u, cos u, 1}=(cos u–v sen u, sen u+v cos u,u+ v),

en la que

$\underline{D}=\{\cos u, \operatorname{sen} u, u\}$, $\dot{\underline{D}}=\{-\operatorname{sen} u, \cos u, 1\}$, $\ddot{\underline{D}}=\{-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0\}$,

y consideremos el punto $u=0 \Rightarrow \underline{D}_0=\{1, 0, 0\}$, en el que:

$\dot{\underline{D}}_0=\{0, 1, 1\}$, $\ddot{\underline{D}}_0=\{-1, 0, 0\}$,

$\dot{\underline{D}}_0\times\ddot{\underline{D}}_0=\{0, -1, 1\}$, $(\dot{\underline{D}}_0\times\ddot{\underline{D}}_0)\times\dot{\underline{D}}_0=\{-2, 0, 0\}$,

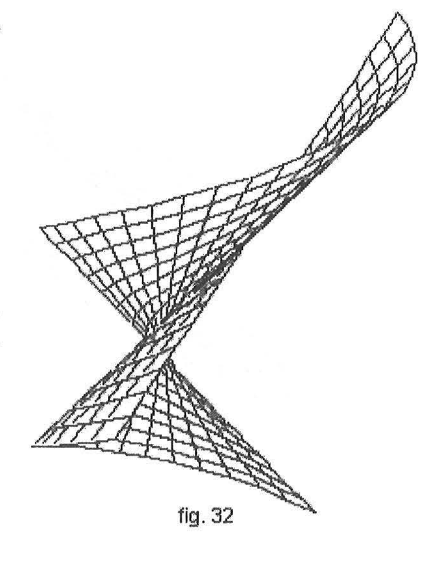
el plano normal a la curva será el $0(x-1)+1(y-0)+1(z-0)=0 \Rightarrow y+z=0$, así que la intersección de la superficie con este plano puede deducirse de la ecuación:

$$\operatorname{sen} u+ v \cos u+u+v =0 \Rightarrow v=-\frac{u+\operatorname{sen} u}{1+\cos u},$$

o sea, la curva:

$$\left(\cos u+\frac{u+\operatorname{sen} u}{1+\cos u}\operatorname{sen} u, \operatorname{sen} u-\frac{u+\operatorname{sen} u}{1+\cos u}\cos u, u-\frac{u+\operatorname{sen} u}{1+\cos u}\right),$$

que se representa en la figura 33(a).


fig. 32

Un plano que contiene a la normal pero no a la tangente, por ejemplo, será el $\mathbf{y = 0}$, cuya intersección con la superficie puede obtenerse de $\mathbf{sen\,u + v\cos u = 0} \Rightarrow \mathbf{v} = -\dfrac{\mathbf{sen\,u}}{\mathbf{\cos u}}$, o sea, la curva:

$(\mathbf{\cos u} + \dfrac{\mathbf{sen\,u}}{\mathbf{\cos u}}\,\mathbf{sen\,u,\ 0,\ u} - \dfrac{\mathbf{sen\,u}}{\mathbf{\cos u}})$, que se representa en la figura 33(b).

Otro plano en las mismas condiciones anteriores, al otro lado del plano osculador, es el $\mathbf{z = 0}$ y su intersección con la superficie se deduce de la ecuación $\mathbf{u + v = 0} \Rightarrow \mathbf{v = -u}$, dando la curva:
(cos u +u sen u, sen u –u cos u, 0), que se representa en la figura 33(c).
Las secciones anteriores, con un punto de retroceso de primera especie en **u = 0**, ilustran lo dicho anteriormente.

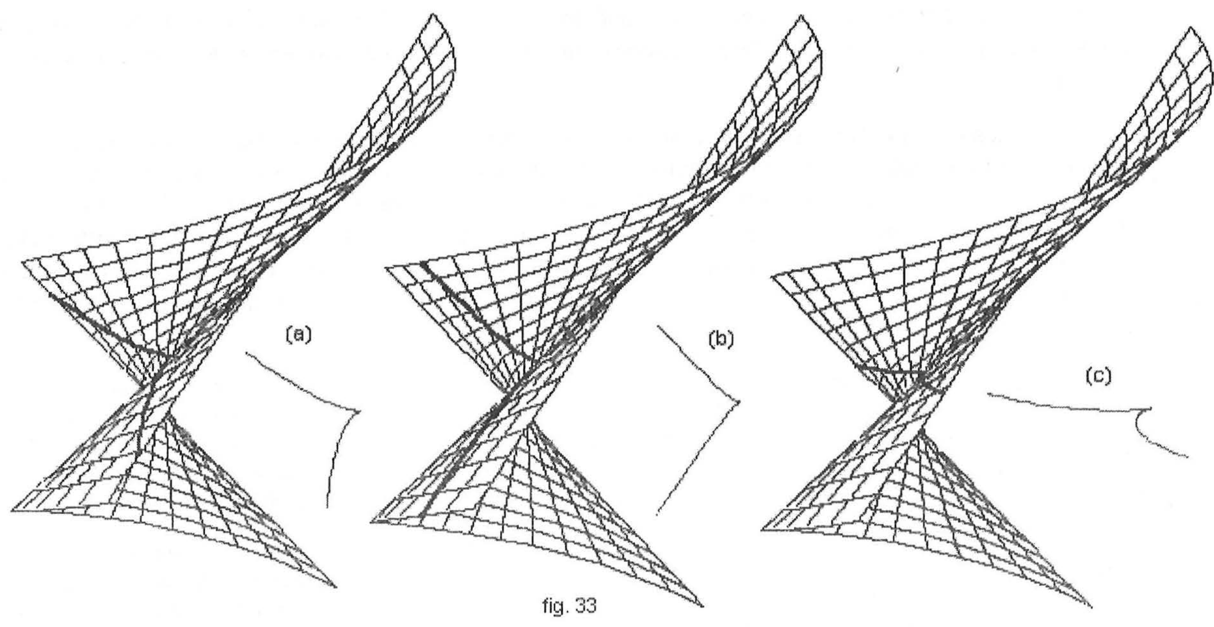


fig. 33

Como en el caso de los conos, existen diferentes parametrizaciones regladas de las tangenciales no referidas a la directriz de su desarrollo y que por lo tanto no manifiestan de forma explícita la relación entre las funciones vectoriales $\underline{\mathbf{D}}$ y $\underline{\mathbf{d}}$; es decir, que encubren –con mejor o peor fortuna– su carácter. Podemos obtener curvas que nos pueden servir como nuevas directrices desde cualquier parametrización inicial.

Podemos, por ejemplo, tomar en el helicoide anterior la curva **v = –u** de la figura 33(c) – intersección con el plano **z =0** – como nueva directriz, obteniendo la representación:
(cos u + u sen u, sen u–u cos u, 0) +v{–sen u, cos u, 1}=(cos u +(u–v) sen u, sen u +(v–u) cos u, v).

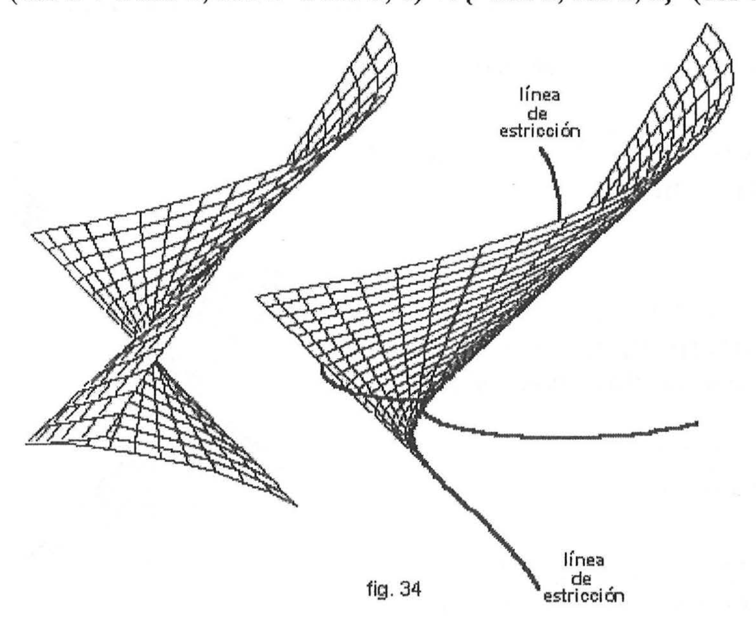


fig. 34

Esta representación no es la intrínseca de la superficie y no muestra explícitamente su característica de tangencial del helicoide. El cálculo de su línea de estricción o, si se quiere, de su arista de retroceso, nos dará, trivialmente, la directriz del desarrollo:
(cos u, sen u, u),
y tomándola ahora como directriz de la parametrización podemos recuperar la parametrización intrínseca de la tangencial:
(cos u, sen u, u) +v {–sen u, cos u, 1}.
En la figura 34 se representa la superficie y sobre una de sus "hojas"–para su mejor comparación–, la arista de retroceso y la directriz tomada en la representación alternativa.

Tomando ahora **v = 4+cos u+ sen u** definimos una nueva curva sobre el helicoide:
(cos u −(4+cos u+ sen u) sen u, sen u +(4+cos u+ sen u) cos u, 4 +u+cos u+ sen u),
que puede ser tomada como nueva directriz para describir la superficie:
(cos u −(4+cos u+ sen u) sen u, sen u +(4+cos u+ sen u) cos u, 4 +u+cos u+ sen u) +v{−sen u, cos u, 1}.
En la figura 35 se ha representado un punto de vista distinto de la superficie y sobre una de sus "hojas" la nueva curva directriz y la arista de retroceso, curva a la que todas las generatrices son tangentes.

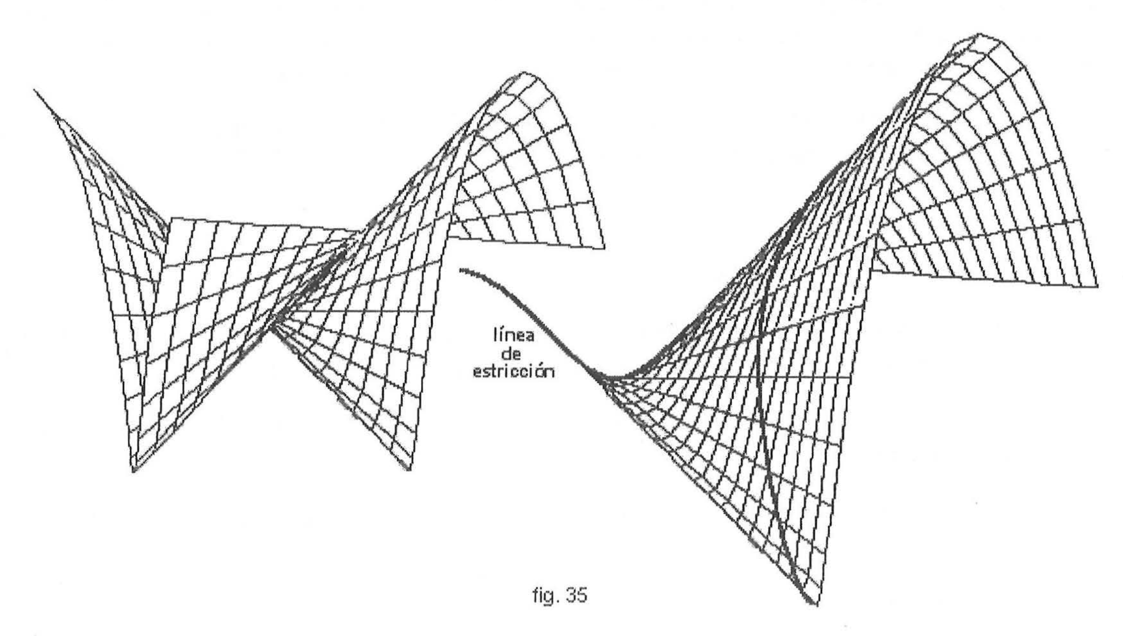


fig. 35

Finalmente, consideremos la superficie reglada parametrizada:
$(\cos^3 u - v \operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} u\,(1+\cos^2 u) + v\cos u,\ u + v + \operatorname{sen} u \cos u) =$
$= (\cos^3 u,\ \operatorname{sen} u\,(1+\cos^2 u),\ u+\operatorname{sen} u\cos u) + v\,\{-\operatorname{sen} u, \cos u, 1\},$
consecuencia de sustituir el parámetro "v" por "v+ **sen u cos u**" en la parametrización intrínseca del helicoide, de manera que no resulte sencillo, por simple inspección, asociarla al helicoide.
Podemos comprobar, en primer lugar, que su parámetro de distribución es nulo

$$f^*(u) = (\dot{\underline{D}}, \underline{d}, \dot{\underline{d}}) = \begin{vmatrix} -3\cos^2 u \operatorname{sen} u & \cos u(1+\cos^2 u) - 2\operatorname{sen} u \cos u & 2\cos^2 u \\ -\operatorname{sen} u & \cos u & 1 \\ -\cos u & -\operatorname{sen} u & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

así que comprobamos que es una superficie desarrollable. Esta parametrización, además, verifica:

$$\dot{\underline{D}} \times \underline{d} = \begin{vmatrix} -3\cos^2 u \operatorname{sen} u & \cos u(1+\cos^2 u) - 2\operatorname{sen} u \cos u & 2\cos^2 u \\ -\operatorname{sen} u & \cos u & 1 \end{vmatrix} = \{-\operatorname{sen}^2 u \cos u, \cos^2 u \operatorname{sen} u, -\operatorname{sen} u \cos u\},$$

$$\dot{\underline{d}} \times \underline{d} = \begin{vmatrix} -\cos u & -\operatorname{sen} u & 0 \\ -\operatorname{sen} u & \cos u & 1 \end{vmatrix} = \{-\operatorname{sen} u, \cos u, -1\},$$

y siendo $(\dot{\underline{D}} \times \underline{d}).(\dot{\underline{d}} \times \underline{d}) = 2 \operatorname{sen} u \cos u$, $\quad (\dot{\underline{d}} \times \underline{d})^2 = 2,$
la arista de retroceso será la curva:
$\underline{w}(u) = (\cos^3 u,\ \operatorname{sen} u\,(1+\cos^2 u),\ u + \operatorname{sen} u \cos u) - \operatorname{sen} u \cos u\,\{-\operatorname{sen} u, \cos u, 1\} = (\cos u, \operatorname{sen} u, u);$
por lo que tomándola como directriz, obtenemos de nuevo la representación intrínseca del helicoide:
(cos u, sen u, u) +v {−sen u, cos u, 1}=(cos u −v sen u, sen u +v cos u, u + v),
que muestra explícitamente que las generatrices son tangentes a la directriz.

§ 13.- Superficies alabeadas. Puntos singulares.

En el **§2** se describió la disposición de las familias de planos tangentes a lo largo de cualquier generatriz no "parabólica" –en las que **u** no anula a **f ***– en el caso de superficies no desarrollables o "alabeadas" (**f *(u) ≠ 0**, función no nula). En el **§ 8** se completó esta configuración con la inclusión de los puntos centrales, planos centrales

y asintóticos que, así mismo, son elementos propios de las superficies alabeadas. Ya hemos visto en el **§ 11** que en las desarrollables esta familia se convierte sobre cada generatriz en un único plano tangente a la superficie a lo largo de la misma, por lo que carece de sentido propio hablar de plano central deviniendo el punto central en singular. En los **§ 7**, **§ 8**, **§ 9** y **§ 10** se ha tratado sobre la línea de estricción, y su relación con la estructura de la superficie, aplicable a las alabeadas, relación que se convierte en crítica en el caso de superficies desarrollables –conos y tangenciales– o en indeterminada –cilindros–. Ya se ha dicho que contrariamente a lo que ocurre en las desarrollables, en las superficies alabeadas la línea de estricción no se suele mostrar visiblemente y lo normal es que pase desapercibida salvo algunos indicios o en determinados casos muy notorios. Nos queda investigar la relación entre los puntos centrales y los singulares en las superficies alabeadas.

Un análisis semejante al realizado en las desarrollables puede hacerse sobre las que no lo son respecto a sus posibles puntos singulares, presentándose distintas posibilidades para la anulación del vector

$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = (\dot{\underline{D}} \times \underline{d}) + v\,(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})$.

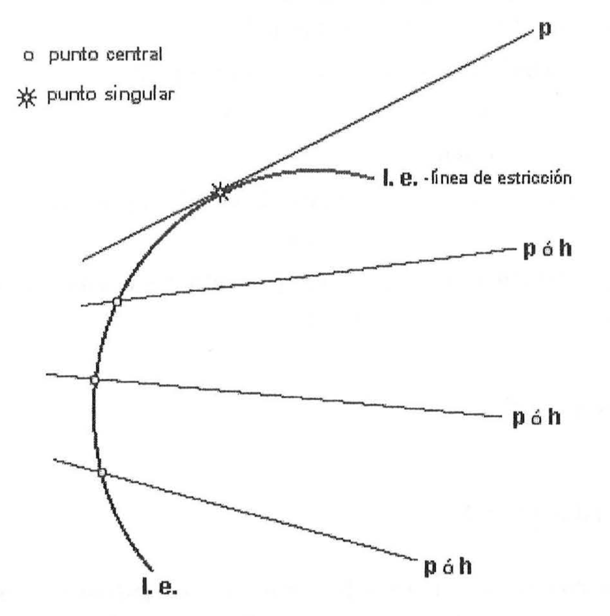
Descartado el caso en que se anule –"artificialmente"– el vector $\underline{d}$, pueden existir valores que anulen eventualmente al vector $\dot{\underline{d}}(u)$ y, naturalmente puntos singulares de la directriz $\underline{D}$. Se deducen fácilmente los siguientes casos particulares relacionados con las posibles singularidades de la directriz:

a). Si $\dot{\underline{D}}$ y $\underline{d}$ son vectores de la misma dirección para algún valor de "u", se induce un punto singular aislado para **u =u, v =0**.

b). Valores de "u" que anulen simultáneamente a $\dot{\underline{D}}$ y a $\dot{\underline{d}}$, proporcionan generatrices de puntos singulares para **u =u**.

c). Los puntos singulares **u =u** de la directriz ($\dot{\underline{D}}$ **(u)=0**) son puntos singulares aislados (**u=u, v=0**) de la superficie si $\dot{\underline{d}}$ **(u)≠0**.

d). Valores de "u" que anulen a $\dot{\underline{D}}$ y en el que $\underline{d}$ y $\dot{\underline{d}}$ tengan la misma dirección, proporcionan generatrices de puntos singulares **u =u** en la superficie.



p - generatriz de puntos parabólicos o planos **h** - generatriz de puntos hiperbólicos

fig. 36

Si no se verifica ninguno de los casos anteriores, la anulación de los vectores no nulos $(\dot{\underline{D}} \times \underline{d})$ y $(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})$ se hace imposible salvo que, eventualmente, para un cierto valor de "u" tengan la misma dirección. Es decir, queda el caso en que $(\dot{\underline{D}} \times \underline{d})$ y $(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})$ sean vectores equivalentes para algún valor de "u" y en este caso los vectores $\dot{\underline{D}}$, $\underline{d}$ y $\dot{\underline{d}}$ son –localmente–coplanarios; esta disposición se hace extensiva a todos los puntos de la generatriz definida por este valor de "u". Si ambos vectores son paralelos, la anulación de $\underline{r}_u \times \underline{r}_v$ implica

$(\dot{\underline{D}} \times \underline{d}) + v(\dot{\underline{d}} \times \underline{d}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\dot{\underline{D}} \times \underline{d}).(\dot{\underline{d}} \times \underline{d}) + v(\dot{\underline{d}} \times \underline{d}).(\dot{\underline{d}} \times \underline{d}) = 0$,

con $(\dot{\underline{d}} \times \underline{d}) \neq 0$, de donde: $v = -\dfrac{(\dot{\underline{D}} \times \underline{d})(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})}{(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})}$, lo que determina, en general, un punto singular y, a su vez, central.

Se deduce que los puntos centrales de cada generatriz –en general regulares– son puntos singulares cuando, circunstancialmente, sobre la generatriz se verifica la dependencia lineal de los vectores $\dot{\underline{\mathbf{D}}}$, $\underline{\mathbf{d}}$ y $\dot{\underline{\mathbf{d}}}$ y esto implica que es una generatriz "cilíndrica" –de puntos parabólicos o planos– tangente a la línea de estricción, así que la superficie alabeada se comporta localmente como una desarrollable (figura 36). Una razón más para interesarnos por el reconocimiento de las generatrices "cilíndricas" –de puntos parabólicos– de cualquier superficie alabeada, generatrices que son líneas "de fragilidad" estructural de estas superficies.

Puede afirmarse por tanto que si la directriz $\underline{\mathbf{D}}$ es una curva regular, los puntos singulares de la superficie son puntos centrales (sobre la línea de estricción) ya que si $\dot{\underline{\mathbf{D}}}$ y $\underline{\mathbf{d}}$ tienen la misma dirección, trivialmente $\underline{\mathbf{D}}$ es tangente a $\underline{\mathbf{w}}$ o coincide con ella. Los puntos singulares de una superficie alabeada son, además, necesariamente puntos parabólicos o planos.

Si consideramos la superficie descrita en su parametrización canónica $\underline{\mathbf{w}}+v\,\underline{\mathbf{d}}_1$, el análisis de los puntos singulares se simplifica notablemente. El vector $(\dot{\underline{\mathbf{w}}}\times\underline{\mathbf{d}}_1)+v\,(\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1\times\underline{\mathbf{d}}_1)$ se anulará solamente si $\dot{\underline{\mathbf{w}}}\times\underline{\mathbf{d}}_1=\mathbf{0}$ en valores $\mathbf{v=0}$ (de la línea de estricción), puesto que $(\dot{\underline{\mathbf{w}}}\times\underline{\mathbf{d}}_1)$ tiene la dirección de $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$, siendo $\underline{\mathbf{d}}_1$ y $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$ perpendiculares (figura 23); esto ocurre para valores "**u**" que anulen $\dot{\underline{\mathbf{w}}}$ **(u)** o bien en aquellos en los que $\dot{\underline{\mathbf{w}}}$ tenga la dirección de $\underline{\mathbf{d}}_1$. En el primer caso se trata de puntos singulares de la línea de estricción –que son puntos centrales–, y en el segundo caso se trata de generatrices tangentes a $\underline{\mathbf{w}}$ (figura 37)

Pueden recordarse, al respecto, las fórmulas del § **11**; siendo $|\mathbf{h}| = \dfrac{\mathbf{f}^*}{|\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1|^2} = = \dfrac{|\dot{\underline{\mathbf{w}}}\times\underline{\mathbf{d}}_1|}{|\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1|}$ y $\dot{\underline{\mathbf{w}}}\times\underline{\mathbf{d}}_1=\mathbf{h}\ \dot{\underline{\mathbf{d}}}_1$, se obtuvo:

$|\underline{\mathbf{r}}_u\times\underline{\mathbf{r}}_v|^2=\left(\dfrac{\mathbf{f}^{*2}}{|\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1|^4}+v^2\right)|\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1|^2=(\mathbf{h}^2+v^2)\,|\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1|^2$, y de aquí: $|\underline{\mathbf{r}}_u\times\underline{\mathbf{r}}_v|=\sqrt{\mathbf{h}^2+v^2}\,|\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1|$, donde si $\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1\neq\mathbf{0}$, los puntos singulares serán centrales, $\mathbf{v=0}$, en los que además $\mathbf{h=0}$.

generatriz
$(\dot{\underline{D}},\underline{d},\dot{\underline{d}})=0$
l. e.
línea de estricción
l. e.
línea de estricción

fig. 37

§ 14.- Conoides.

Como se sabe, los conoides son superficies generadas por rectas que permaneciendo paralelas a un plano **P**, se apoyan en una directriz $\underline{\mathbf{D}}$ y en una recta $\underline{\mathbf{E}}$ no paralela ni contenida en **P** (figura 38). El plano **P** es el llamado "**plano director**" del conoide y la recta $\underline{\mathbf{E}}$ es el "**eje**" del conoide. La directriz $\underline{\mathbf{D}}$ puede ser también rectilínea en cuyo caso, si satisface las condiciones de eje –no ser paralela ni estar contenida en el plano director–, cualquiera de las dos directrices $\underline{\mathbf{E}}$ o $\underline{\mathbf{D}}$ puede ser considerada su eje. Cuando el eje es perpendicular al plano director se denomina un conoide "recto" y en otro caso "oblicuo".

fig. 38

Se comprende que si el eje es paralelo o está contenido en el plano director la superficie deviene en un fragmento de plano o degenera en una recta según la dirección del eje $\underline{E}$ y si este corta o no a la directriz $\underline{D}$.

Descritas las dos directrices $\underline{E}$ y $\underline{D}$ en el mismo parámetro "u" por medio de la condición de ser las generatrices paralelas al plano **P**, consideraremos el eje $\underline{E}(u)$ descrito en su parametrización lineal usual por lo que $\dot{\underline{E}}=\mathbf{cte}$, y $\ddot{\underline{E}}=\mathbf{0}$. Siendo $\underline{a}=\mathbf{cte}$ el vector característico del plano director, la condición de eje se convierte en $\dot{\underline{E}}\cdot\underline{a}\neq 0$ y la superficie podrá representarse alternativamente por las parametrizaciones::

$\underline{E}(u)+v\,\underline{d}(u)$, o bien $\underline{D}(u)+v\,\underline{d}(u)$, con $\underline{d}=\underline{D}-\underline{E}$, $\underline{d}\cdot\underline{a}=0$.

Si partimos de la parametrización $\underline{E}+v\,\underline{d}_1$, con $\underline{d}_1\cdot\underline{a}=0 \Rightarrow \dot{\underline{d}}_1\cdot\underline{a}=0$, se ha de verificar $\underline{d}_1\times\dot{\underline{d}}_1=\lambda(u)\,\underline{a}$, y el parámetro de distribución será $(\dot{\underline{E}},\underline{d}_1,\dot{\underline{d}}_1)=\dot{\underline{E}}\cdot(\underline{d}_1\times\dot{\underline{d}}_1)=\lambda(u)\,\dot{\underline{E}}\cdot\underline{a}$, con $\dot{\underline{E}}\cdot\underline{a}\neq 0$, de donde deducimos que el conoide solamente será una superficie desarrollable cuando $\lambda(u)=0$ y siendo $\underline{d}_1$ no nulo, $\underline{d}_1$ y $\dot{\underline{d}}_1$ perpendiculares, deberá ser $\dot{\underline{d}}_1=0 \Rightarrow \underline{d}_1(u)=\mathbf{cte}$, lo que nuevamente convierte a la superficie en un plano ya que la curva $\underline{D}$, plana, debe estar contenida en el plano que contienen al eje (figura 39(a)).

Resultados semejantes encontramos si partimos de la parametrización $\underline{D}+v\,\underline{d}_1$ teniendo en cuenta la relación entre directrices. Si $\dot{\underline{D}}\cdot\underline{a}=0$ la directriz es plana en un plano paralelo al director y el conoide degenera en un plano (figura 39(b)) y si la directriz $\underline{D}$ es una recta que corta al eje, el conoide degenera en una recta (figura 39(c)).

En general, el conoide se representará por $\underline{E}+v\,\underline{d}$ o bien por $\underline{D}+v\,\underline{d}=\underline{D}+v(\underline{D}-\underline{E})$, que incluye explícitamente la directriz $\underline{D}$, y, en este último caso, su parámetro de distribución será $(\dot{\underline{D}},\underline{d},\dot{\underline{d}})=(\dot{\underline{D}},\underline{d},\dot{\underline{E}}-\dot{\underline{D}})=(\dot{\underline{D}},\underline{d},\dot{\underline{E}})$, que nos conduce a las mismas conclusiones anteriores respecto a su carácter de superficie alabeada y a las excepciones planas.

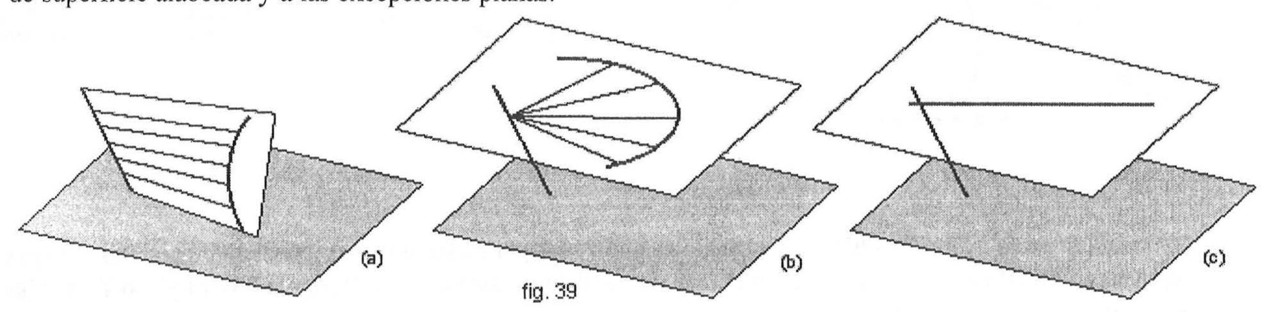


fig. 39

Desde la representación $\underline{E}+v\,\underline{d}_1$, según (3.2) la línea de estricción será $\underline{w}=\underline{E}-\dfrac{\dot{\underline{E}}\cdot\dot{\underline{d}}_1}{\dot{\underline{d}}_1^{\,2}}\,\underline{d}_1$, con $\underline{d}_1\neq 0$,

y siendo $\dot{\underline{d}}_1 (u)\neq 0$ (superficie no cilíndrica), la línea de estricción coincide con el eje cuando $\dot{\underline{E}}.\dot{\underline{d}}_1 = 0$. Si $\dot{\underline{E}}.\underline{d}_1 = 0$ $\Rightarrow$ $\dot{\underline{E}}.\dot{\underline{d}}_1 = 0$, así que en los conoides rectos la línea de estricción coincide con el eje, lo que resulta evidente puesto que el eje es perpendicular común a todas las generatrices. El caso $\dot{\underline{E}}.\underline{d}_1 = \mathrm{cte} \Rightarrow \dot{\underline{E}}.\dot{\underline{d}}_1 = 0$ no se corresponde con un conoide ya que las generatrices deberán formar un ángulo constante con el eje y al mismo tiempo ser paralelas al plano director – una intersección, si se quiere, de un cono y un plano – o bien la superficie resulta directamente plana. En los conoides oblicuos la línea de estricción será, en general, una curva que no coincide con el eje.

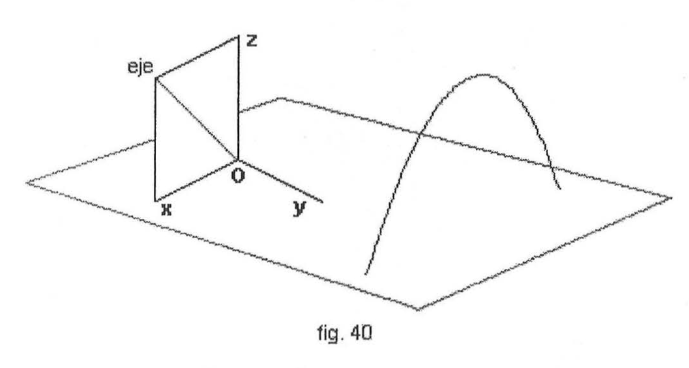


fig. 40

Finalmente puede llegarse a estas y a otras conclusiones, sin pérdida de generalidad, haciendo coincidir el plano director del conoide con el eje **XOY** y estableciendo el origen de coordenadas en la intersección del eje con el plano director. Tomando, además, los ejes coordenados de manera que el plano **XOZ** contenga al eje (figura 40), $\underline{E}$ puede representarse ahora por $(\alpha\,\lambda, 0, \lambda)$.

Con $\underline{E} = \{\alpha\,\lambda, 0, \lambda\}$ y $\underline{D}(u) = \{x(u), y(u), z(u)\}$, la dirección de las generatrices quedará determinada por el vector $\{x-\alpha\lambda, y, z-\lambda\}$ y deberán ser paralelas al plano $z = 0$, así que $\lambda = z$ y la superficie podrá representarse por $\underline{E} + v\,\underline{d} = (\alpha\, z, 0, z) + v\{x-\alpha\, z, y, 0\} = (\alpha\, z + v(x-\alpha\, z), v\, y, z)$. El parámetro de distribución será:

$$f^* = (\dot{\underline{E}}, \underline{d}, \dot{\underline{d}}) = \begin{vmatrix} \alpha\dot{z} & 0 & \dot{z} \\ x-\alpha z & y & 0 \\ \dot{x}-\alpha\dot{z} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\dot{z} & 0 & \dot{z} \\ x-\alpha z & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \dot{z}(\underline{E}, \underline{d}, \dot{\underline{D}}),$$

una expresión que vincula al eje y a la directriz y de la que se deduce que $\dot{z}(u) = 0 \Rightarrow z = \mathrm{cte}$, corresponde al caso de una directriz $\underline{D}$ plana contenida en un plano paralelo al director en el que el conoide deviene en un plano. El resto de los casos que anulan a **f *** convierten al conoide, así mismo, en una superficie plana o bien degenera en una recta. En cualquier otro caso, el conoide es una superficie alabeada.

Obtenemos además los vectores:

$$\dot{\underline{E}} \times \underline{d} = \begin{vmatrix} \alpha\dot{z} & 0 & \dot{z} \\ x-\alpha z & y & 0 \end{vmatrix} = \dot{z}\{-y, x-\alpha\, z, \alpha\, y\}, \qquad \dot{\underline{d}} \times \underline{d} = \begin{vmatrix} \dot{x}-\alpha\dot{z} & \dot{y} & 0 \\ x-\alpha z & y & 0 \end{vmatrix} = \{0, 0, y(\dot{x}-\alpha\,\dot{z}) + \dot{y}(x-\alpha z)\},$$

y los puntos centrales se obtienen para $v = v_c = -\dfrac{\alpha\, y\, \dot{z}}{y(\dot{x}-\alpha\dot{z}) - \dot{y}(x-\alpha z)}$,

con lo que la línea de estricción será la curva: $(\alpha\; z, 0, z) - \dfrac{\alpha\, y\, \dot{z}}{y(\dot{x}-\alpha\dot{z}) - \dot{y}(x-\alpha z)}\{x-\alpha\; z, y, 0\}$,

donde si $\dot{z} = 0$ se convierte en un punto del eje del conoide –que se manifestará, además, como un punto singular–. El caso $\alpha = 0$ corresponde a los conoides rectos en los que la línea de estricción es el eje del conoide convertido ahora en el eje coordenado **OZ**. Si $y = 0$, la directriz es plana, contenida en el plano del eje **XOZ** quedando indeterminada la línea de estricción.

Respecto de los puntos singulares será de aplicación general lo dicho para las superficies alabeadas. No obstante, podemos obtener:

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \alpha\dot{z} + v(\dot{x}-\alpha\dot{z}) & v\dot{y} & \dot{z} \\ x-\alpha z & y & 0 \end{vmatrix} = \{-y\,\dot{z}, (x-\alpha\; z)\,\dot{z}, \alpha\; y\;\dot{z} + v\,(\dot{x}-\alpha\dot{z})\,y - \dot{y}\,(x-\alpha\; z)\},$$

así que, independientemente de los puntos singulares que pueda aportar la directriz $\underline{\mathbf{D}}$ con $\dot{\underline{\mathbf{D}}} = \mathbf{0}$, la anulación de la tercera componente de este vector nos indica que los puntos singulares se encuentran necesariamente sobre la línea de estricción; la anulación de la dos primeras componentes: $-\mathbf{y}\ \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha}\ \mathbf{z})\ \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$, proporciona un punto singular cuando el conoide degenera en un sector de plano formado por una radiación de rectas desde un punto del eje, o bien todo el conoide degenera en una recta (el eje) cuando la directriz $\underline{\mathbf{D}}$ es una recta coincidente con él.

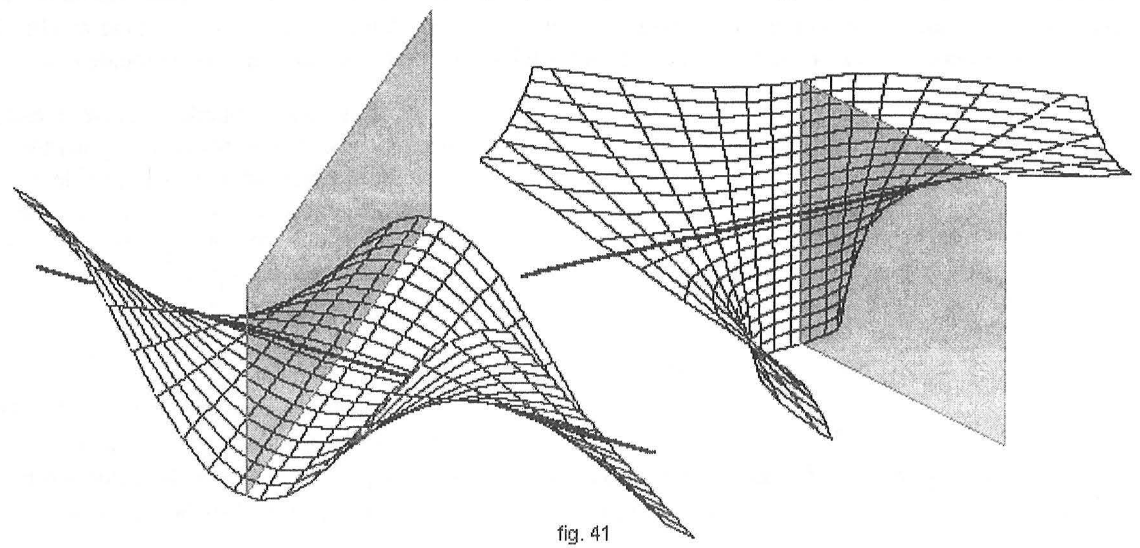


fig. 41

Podemos reconocer ahora la superficie **(v, u, v cos u) = (0, u, 0) + v {1, 0, cos u}** –utilizada en diferentes ejemplos a lo largo de la primera parte del texto y representada en la figura 01 y otras posteriores– como un conoide recto de plano director **XOZ**, con su eje coincidente con el eje coordenado **OY** – que es su línea de estricción –. El conoide está pues expresado en su parametrización intrínseca pero puede ser generado por cualesquiera dos curvas que corten a todas las generatrices tales como el propio eje **OY**, la **x =1, z = cos y**, o bien la **x = y, z = cos x** ...etc, con la condición de ser las generatrices perpendiculares al vector **{1, 0, 0}**. Así mismo, la superficie de la figura 08 del § 3: $(\mathbf{u}, \mathbf{v}\ \mathbf{u}^3, \mathbf{1}-\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) + \mathbf{v}\ \{\mathbf{0}, \mathbf{u}^3, -\mathbf{1}\}$, es, así mismo, un conoide recto que está representado en su parametrización intrínseca con su línea de estricción – el eje del conoide – normal al plano director **YOZ**. Puede ser generado por el eje **z=1, y=0**, o la cúbica $\mathbf{y} = \mathbf{x}^3$, **z=0** o la **z=2**, $\mathbf{y} = -\mathbf{x}^3$,...etc. Ambas superficies se representan de nuevo en la figura 41 señalando los planos directores y las líneas de estricción– normales a ellos–, ejes de ambos conoides.

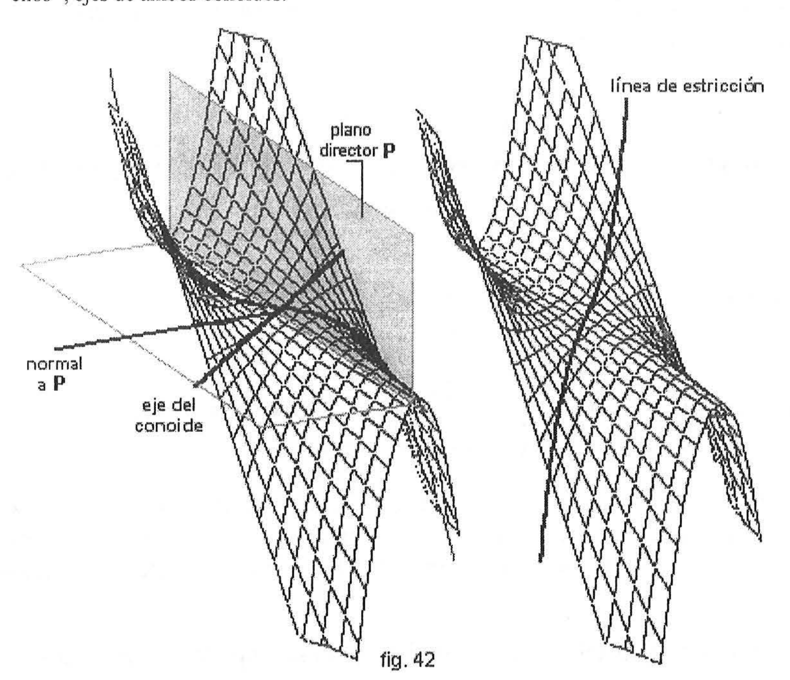


fig. 42

En tanto, la superficie del **§ 9**: $(\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{v}\ \mathbf{u}^2) = (\mathbf{0}, \mathbf{u}, \mathbf{0}) + \mathbf{v}\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{u}^2\}$, es un conoide oblicuo, de eje **OY** que no es normal al plano director **x + y=0** –cuyo vector característico es el **{1, 1, 0}**–. En **§ 8** y **§ 9** se obtuvo su línea de estricción $\left(-\frac{\mathbf{u}}{4}, \frac{5\ \mathbf{u}}{4}, -\frac{\mathbf{u}^3}{4}\right)$. Este conoide puede ser generado con cualesquiera dos directrices tales como el eje **x=0, z=0**, la cúbica plana **y=0**, $\mathbf{z} = \mathbf{x}^3$ o bien la **y+2 x=0**, $\mathbf{z} = \mathbf{x}^3$, la propia línea de estricción...etc. Esta superficie está representada de nuevo en la ilustración 42; en la figura izquierda se muestra su plano director, la normal que forma 45° con el eje y las dos directrices con las que ha sido generado: el eje y la cúbica **y=0**, $\mathbf{z} = \mathbf{x}^3$. En la figura derecha se representa su línea de estricción.

§ 15.- Conoides de transición entre rectas, no paralelas, en planos paralelos: El paraboloide hiperbólico.

Nos interesamos ahora por algunas superficies regladas de transición entre dos rectas –no paralelas– en planos paralelos (figura 43a), engendradas por generatrices que se apoyan en ambas o, si se quiere, garantizando que las dos rectas –directrices– no pertenezcan a la familia de generatrices.

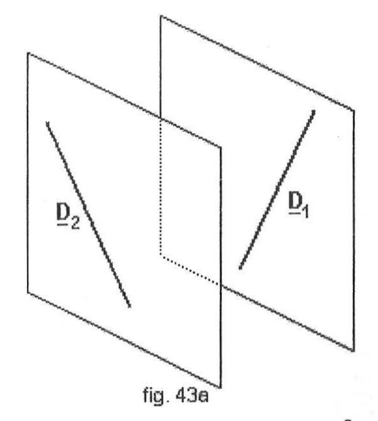


fig. 43a

Sin perder generalidad, podemos hacer coincidir una de ellas, $\underline{D}_1$, con el eje **OZ**: **(0, 0, u)**, en tanto la segunda directriz $\underline{D}_2$ será una recta cualquiera del plano **x = a**, que podemos hacerla pasar por el punto **(a, 0, 0)**, de manera que no sea paralela al eje **OZ** (figura 43b). En estas condiciones, $\underline{D}_2$ puede describirse paramétricamente por $(a, \varphi, \gamma\,\varphi)$ con $a, \gamma \in \Re$ y "φ" parámetro. Fijaremos "φ" haciéndole dependiente del parámetro "u" de manera que se convierte en una función $\varphi=\varphi(u)$. En estas condiciones, la dirección de las generatrices que se apoyan en ambas directrices serán las del vector:

$(a, \varphi, \gamma\,\varphi) -(0, 0, u)=\{a, \varphi, \gamma\,\varphi-u\}$

y las superficies de transición entre ambas rectas podrá representarse por:

$\underline{r}\,(u, v, \varphi)=(0, 0, u)+v\{a, \varphi, \gamma\,\varphi-u\}= (\,v\,a,\ v\,\varphi,\ a+(1-v)\,u+\gamma\,v\,\varphi)$.

Estas superficies verificarán: $\underline{r}_u=\{0, v\,\dot{\varphi}, 1-v+\gamma\,v\,\dot{\varphi}\}$, $\underline{r}_v=\{a, \varphi, \gamma\,\varphi-u\}$,

$\underline{r}_{uu}=\{0, v\,\ddot{\varphi}, \gamma\,v\,\ddot{\varphi}\}$, $\underline{r}_{uv}=\{0, \dot{\varphi}, \gamma\,\dot{\varphi}-1\}$, $\underline{r}_{vv}=0$ ($g^*= 0$).

Su parámetro de distribución será $f^*=\begin{vmatrix} 0 & \dot{\varphi} & \gamma\dot{\varphi}-1 \\ 0 & v\,\dot{\varphi} & 1-v+\gamma\,v\,\dot{\varphi} \\ a & \varphi & \gamma\varphi-u \end{vmatrix} = a\,\dot{\varphi}$, por lo que estas superficies serán todas alabeadas exceptuando el caso en que $\dot{\varphi}(u)=0 \Rightarrow \varphi=cte$. Corresponde a planos que conteniendo al eje **OZ** cortan a la recta $x = a\,,\ z = \gamma\,y$ en el punto $(a, \varphi, \gamma\,\varphi)$ (figura 44). Trivialmente, no existe, en estas condiciones, una superficie reglada desarrollable de transición entre ambas directrices. Puede comprobarse, además, que este conjunto de superficies carece de puntos singulares para $a\neq 0$.

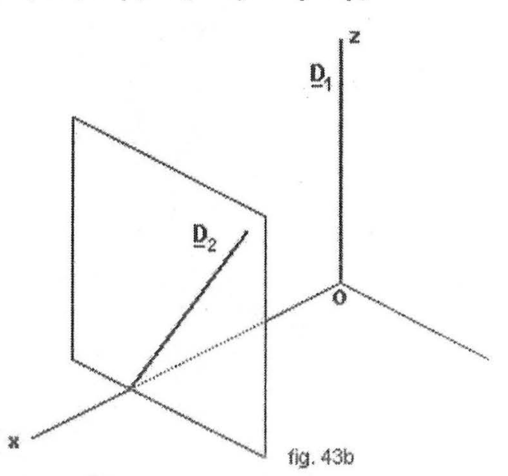


fig. 43b

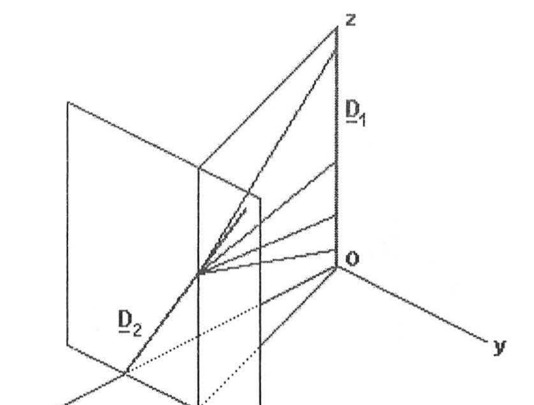


fig. 44

Podemos construir ahora diferentes superficies alabeadas eligiendo diferentes funciones $\varphi(u)$, con $\dot{\varphi}\neq 0$, que cumplan nuestro objetivo de encontrar superficies de enlace entre las dos rectas. En la figura 45a representamos algunas de ellas y sus correspondientes fragmentos para el caso de dos rectas de direcciones perpendiculares, **a=1**, $\gamma=0$, generadas con algunas funciones φ sencillas.

Seleccionaremos ahora, entre todas estas superficies, las de plano director genérico $A\ x+B\ y+Cz+D = 0$, es decir, los posibles conoides de transición entre ambas rectas. Las generatrices deberán verificar en este caso:

$\{a, \varphi, \gamma\,\varphi-u\}\ \{A, B, C\} = 0 \quad \Rightarrow \quad A\,a+ B\gamma+ C\,(\gamma\,\varphi-u)= 0$

$\Rightarrow \quad (B+ C\,\gamma)\,\varphi= C\,u- A\,a$,

y de aquí: $\varphi = \dfrac{C}{B+\gamma C}\,u - \dfrac{A\,a}{B+\gamma C}$ con $B+ \gamma\,C \neq 0$.

Los conoides buscados se corresponden por lo tanto con un función φ lineal del parámetro "**u**", es decir, genéricamente con una función $\varphi = c_1\,u + c_2$. En la figura 45b se representa, por ejemplo, el fragmento de conoide que enlaza las dos rectas de dirección perpendicular para el caso **a=1** tomando la función $\varphi=u+1$.

En general todos estos conoides tendrán la representación paramétrica:

$(v\,a,\ v(c_1\,u +c_2),\ (1-v)\,u+ \gamma\,v\,(c_1\,u +c_2))=(0, 0, u)+ v\,\{a,\ c_1\,u +c_2,\ \gamma\,(c_1\,u +c_2)-u\}$,

y para todos ellos se verifica $e^* = g^* = 0$, $f^* = a\,c_1$, así que las líneas asintóticas coincidirán en todo caso con las líneas coordenadas **u** =Ç, **v** =Ç, con Ç= cte, respectivamente, que son las dos familias de rectas:

$(v\,a,\ v(c_1\,Ç+c_2),\ (1-v)\,Ç + \gamma\,v\,(c_1\,Ç +c_2))$,

$(Ç\,a,\ Ç(c_1\,u +c_2),\ (1-Ç)\,u+ \gamma\,Ç(c_1\,u +c_2))$,

la segunda de las cuales contiene a las dos rectas directrices para **Ç=1** y **Ç=0**, respectivamente, en tanto la primera es la congruencia de generatrices. Se deduce de todo ello que estos conoides son paraboloides hiperbólicos y de aquí que, en estas condiciones, los únicos conoides de transición entre dos rectas en planos paralelos, son los paraboloides hiperbólicos, resultando ser, por lo tanto, una propiedad privativa de estas superficies.



z

D_1

g

O

x

y

D_2

$\varphi = u^2$

$\varphi = u^3$

$\varphi = \text{sen}\, u$

$\varphi = u\ \text{sen}\, u$

45a

$\varphi = u + 1$

fig. 45b

Los conos directores de este conjunto de superficies podrán describirse por la representación:

$(\mathbf{v\ a, v\ (c_1\ u + c_2), v\ (\gamma\ (c_1\ u + c_2) - u)})$,

y la traza esférica por la curva:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2(c_1\ u + c_2) + ((\gamma c_1 - 1)u + \gamma c_2)^2}},\right.$$

$$\frac{c_1\ u + c_2}{\sqrt{a^2(c_1\ u + c_2) + ((\gamma c_1 - 1)u + \gamma c_2)^2}},$$

$$\left.\frac{\gamma(c_1\ u + c_2) - u}{\sqrt{a^2(c_1\ u + c_2) + ((\gamma c_1 - 1)u + \gamma c_2)^2}}\right),$$

que, trivialmente, es una circunferencia máxima contenida en el plano

$\mathbf{a\ c_1\ z - a(\gamma\ c_1 - 1)\ y - c_2\ z = 0}$

y que, pasando por el origen, corta a las rectas directrices en los puntos $\mathbf{(a,\ c_1\ u + c_2,\ \gamma(c_1\ u + c_2))}$ y $\mathbf{(0, 0, u)}$.

Nos interesamos finalmente por la línea de estricción de este conjunto de paraboloides hiperbólicos. Para simplificar las expresiones, nos limitamos al caso particular de las dos directrices en planos paralelos y direcciones perpendiculares, $\mathbf{a=1}$, $\boldsymbol{\gamma}= \mathbf{0}$, lo que no resta ninguna generalidad a los resultados. Podremos representarlos mediante las parametrizaciones $\underline{\mathbf{D}}+\mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}=(\mathbf{0, 0, u}) + \mathbf{v}\{\mathbf{1}, \mathbf{c_1\ u + c_2}, \mathbf{-u}\}$, en las que:

$$\dot{\underline{D}}\times\underline{d}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & c_1+c_2 & -u\end{vmatrix}=\{-c_1\,u-c_2, 1, 0\},\quad \dot{\underline{d}}\times\underline{d}=\begin{vmatrix}0 & c_1 & -1\\ 1 & c_1+c_2 & -u\end{vmatrix}=\{c_2, -1, -c_1\},$$

así que sus puntos centrales se obtendrán para valores $\mathbf{v} = \mathbf{v_c} = -\dfrac{(\dot{\underline{D}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}{(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}=\dfrac{c_1\,c_2+c_2^{\,2}+1}{1+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}}$, y las líneas de estricción serán por lo tanto las curvas:

$$\underline{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{c_1}, \mathbf{c_2})=\left(\frac{c_1\,c_2+c_2^{\,2}+1}{1+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}}, \frac{(c_1\,u+c_2)(c_1\,c_2+c_2^{\,2}+1)}{1+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}}, \frac{c_1\,u(c_1-c_2\,u)}{1+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}}\right),$$

que son planas ($\dddot{\underline{w}}=\mathbf{0}$), en las que $\ddot{\underline{w}}$ es normal al eje **OX**. Se encuentran en distintos planos no paralelos y son parábolas salvo para $\mathbf{c_2= 0}$, cuando el plano director es paralelo al eje **OX**, es decir, para la función $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{c_1\ u}$, en cuyo caso se convierten en las rectas $\left(\dfrac{1}{1+c_1^{\,2}}, \dfrac{c_1\,u}{1+c_1^{\,2}}, \dfrac{c_1^2\,u}{1+c_1^{\,2}}\right)$ que cortan al eje **OX** a distancias $\dfrac{1}{1+c_1^{\,2}}$ del origen, con dirección $\{\mathbf{0, 1, c_1}\}$. Este conjunto de líneas de estricción rectilíneas varían su dirección entre las de ambas directrices. En la figura 46 se representan algunas para diferentes valores de $\mathbf{c_1>0}$ $(\mathbf{c_2=0})$ y en la figura 47 representamos las líneas de estricción parabólicas para $\mathbf{c_1=1}$ y distintos valores $\mathbf{c_2}$, incluido $\mathbf{c_2=0}$.

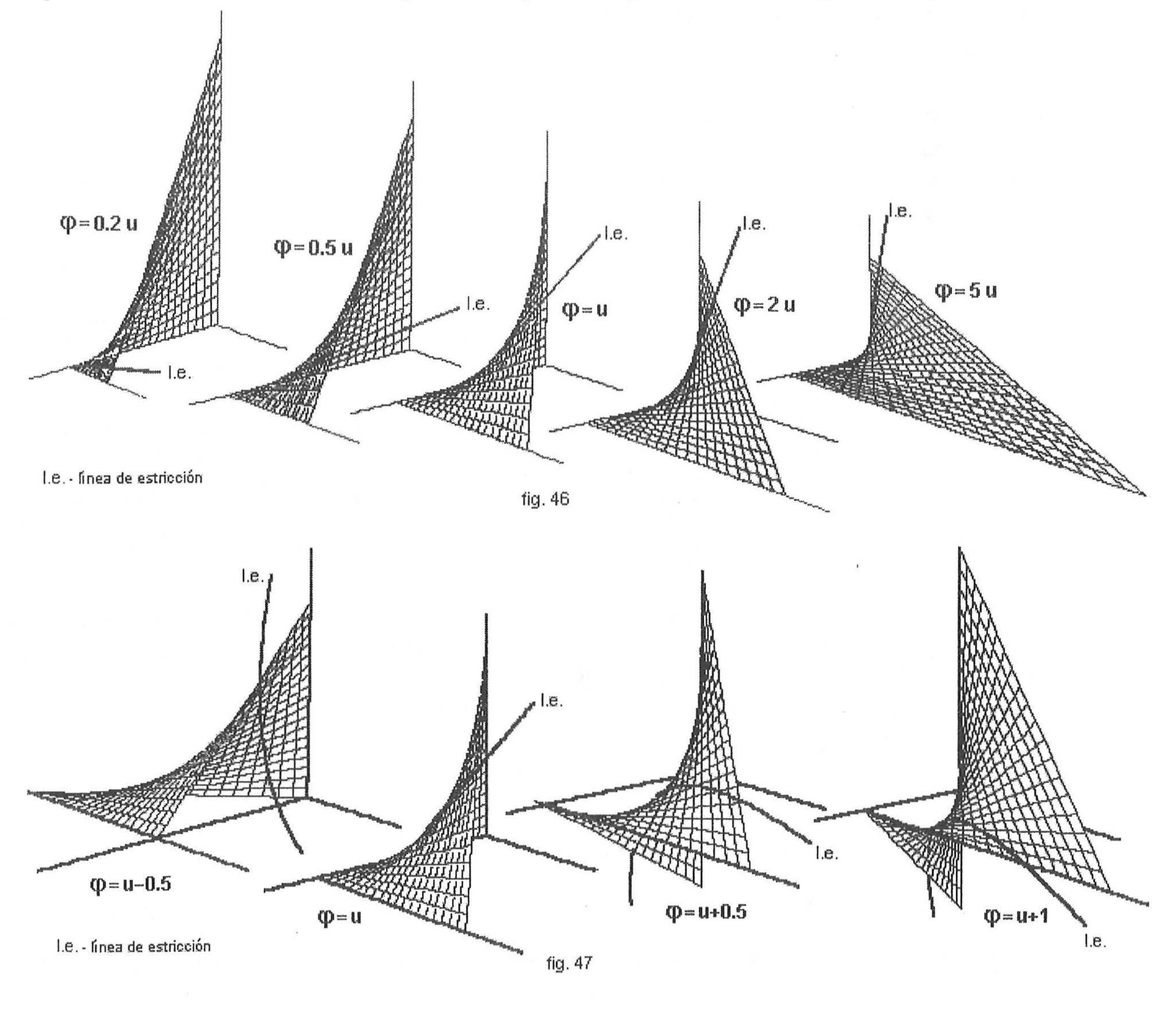


fig. 46

fig. 47

§ 16.- Superficies regladas de revolución. El hiperboloide alabeado.

Como se sabe, las superficies de revolución son las engendradas por rotación de una curva en general alabeada –que podemos denominar directriz– alrededor de una recta que denominamos "**eje**" de la superficie. Una notable simplificación de las ecuaciones de tales superficies – sin restringir su generalidad – se obtiene considerando como eje de la superficie cualquiera de los ejes coordenados y se acostumbra a utilizar el eje **OZ** como eje de rotación. En estas condiciones si la curva directriz está expresada en la forma paramétrica $\underline{c}$(v)={x(v), y(v), z(v)}, la descripción de la superficie puede representarse por la rotación de cada uno de sus puntos alrededor del eje **OZ** en sentido, por ejemplo, "levógiro" (figura 48) proporcionando las ecuaciones cartesianas:

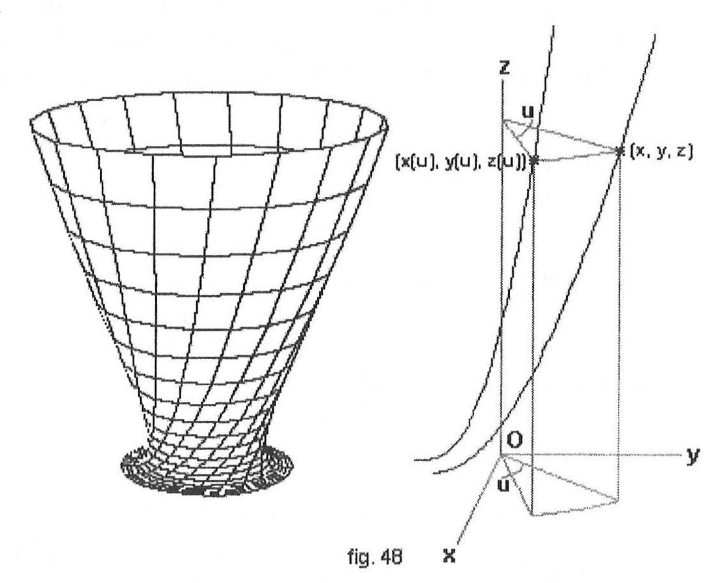


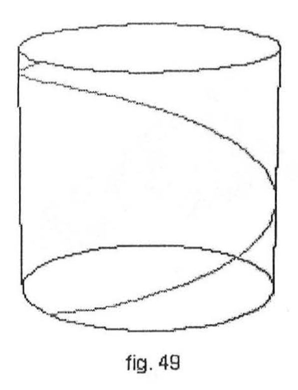
fig. 48

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u & -\text{sen}\, u & 0 \\ \text{sen}\, u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ y(v) \\ z(v) \end{pmatrix}$$

, lo que se traduce en la notación vectorial:

$$\underline{r}\,(u,v)=\{x(v)\cos u-y(v)\,\text{sen}\,u,\ x(v)\,\text{sen}\,u+y(v)\cos u,\ z(v)\} \qquad (7)$$

en la que "**u**" es el ángulo girado desde la posición de la directriz $\underline{c}$. Trivialmente, para cualquier **u=u** la curva resultante es la propia directriz girada un ángulo "**u**" y el conjunto de todas las curvas en $u\in[0, 2\pi)$ forman una congruencia de curvas por rotación. Cualquier punto de la curva $\underline{c}$ describirá entonces una circunferencia en planos paralelos al eje **OZ**. Las curvas **v=cte** son, por lo tanto, este conjunto de circunferencias $x^2+y^2=$**cte** –paralelos– con centro en el eje y radio variable que podemos considerar "generatrices" de la superficie que se apoyan en la directriz $\underline{c}$ o en cualquiera de las giradas cualquier ángulo "**u**".


fig. 49

Una vez obtenida la parametrización (7) podemos ahora calcular la sección de la superficie por cualquier plano meridiano –que contiene al eje– y generar de nuevo la superficie por rotación de cualquiera de estas secciones – meridianos – alrededor del eje. Si obtenemos, por ejemplo, la intersección de (7) con el plano **y=0**, la superficie de revolución de esta sección proporciona las ecuaciones reducidas de la superficie: $\underline{r}$ **(u,v) ={c(v) cos u, c(v) sen u, z(v)}**, con $c(v)=\sqrt{x^2(u)+y^2(u)}$ y el eje **OX** como origen del ángulo "**u**".

Las características y propiedades de estas superficies generales de revolución no son objeto de nuestra atención. Nos limitaremos a las superficies obtenidas, en estas condiciones, por rotación de una recta cualquiera alrededor del eje **OZ**. Estas serán las superficies "regladas, de revolución", al margen de otras posibles superficies que siendo de revolución sean, además, regladas, obtenidas al girar otras posibles curvas alrededor del eje como ocurre, por poner un ejemplo evidente, con la generación de un cilindro por rotación de una hélice circular alrededor de su eje (figura 49), para las que se puede reservar la denominación de superficies "de revolución, regladas".

Si disponemos de la parametrización de cualquier recta en su forma lineal usual $\underline{c}=\{\alpha v+a, \beta v+b, \gamma v+c\}$, el conjunto de superficies obtenidas por su rotación alrededor del eje **OZ**, vendrán, según (7) representadas por:
$((\alpha v+a)\cos u-(\beta v+b)\,\text{sen}\,u,\ (\alpha v+a)\,\text{sen}\,u+(\beta v+b)\cos u,\ \gamma v+c)$, o sea:
$\underline{D}+v\,\underline{d}=(a\cos u-b\,\text{sen}\,u,\ a\,\text{sen}\,u+b\cos u,\ c)+v\,\{\alpha\cos u-\beta\,\text{sen}\,u,\ \alpha\,\text{sen}\,u+\beta\cos u,\ \gamma\}$
y sus parámetros de distribución serán

$$f^*=(\dot{\underline{D}},\underline{d},\dot{\underline{d}})=\begin{vmatrix} -a\,\text{sen}\,u-b\cos u & a\cos u+b\,\text{sen}\,u & 0 \\ \alpha\cos u-\beta\,\text{sen}\,u & \alpha\,\text{sen}\,u+\beta\cos u & \gamma \\ -\alpha\,\text{sen}\,u-\beta\cos u & \alpha\cos u-\beta\,\text{sen}\,u & 0 \end{vmatrix}=\gamma\,(\alpha\, b-\beta\, a).$$

Las superficies serán desarrollables cuando $\gamma=0$, o bien si $\alpha\, b-\beta\, a=0 \Rightarrow \frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}$. En el primer caso, la recta está contenida en el plano **z=c**, normal al eje, y genera en su rotación un plano (figura 50 (a)). En el segundo caso, la

recta es coplanaria con **OZ**, y si α y β son no nulos, está contenida en el plano meridiano $\beta x+\alpha y=0$ con lo que la superficie se convierte en un cono de vértice $(0,0,\frac{\alpha c-\gamma a}{\alpha})$ intersección de la recta con el eje, (figura 50 (b)) lo mismo ocurre si $a=b=0$ con el vértice en $(0,0,c)$. Si $\alpha=\beta=0$, la recta es paralela al eje y la superficie se convierte en un cilindro (figura 50 (c)). En los demás casos, las superficies regladas de revolución son alabeadas.

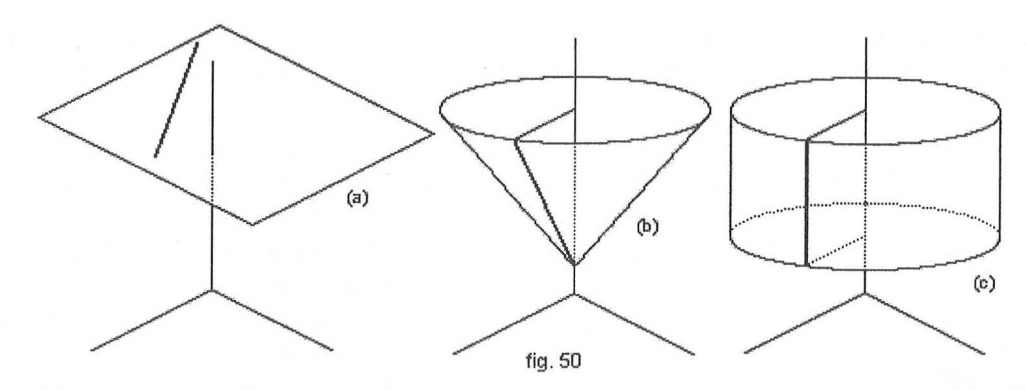


fig. 50

Examinaremos con más detalle el caso en que las superficies son alabeadas $\alpha b \neq \beta a, \gamma \neq 0$. Comprobamos en primer lugar que todos los puntos de estas superficies son hiperbólicos: $g^*=0 \Rightarrow e^* g^* - f^{*2} = -\gamma^2 (\alpha b - \beta a)^2 < 0$. Calcularemos ahora las líneas de estricción de estas superficies. Se obtienen los vectores:

$$\dot{\underline{D}} \times \underline{d} = \begin{vmatrix} -a\,\text{sen}\,u - b\cos u & a\cos u - b\,\text{sen}\,u & 0 \\ \alpha\cos u - \beta\,\text{sen}\,u & \alpha\,\text{sen}\,u + \beta\cos u & \gamma \end{vmatrix} = \{\gamma(a\cos u - b\,\text{sen}\,u), \gamma(a\,\text{sen}\,u + b\cos u), -(\alpha a + \beta b)\}$$

$$\dot{\underline{d}} \times \underline{d} = \begin{vmatrix} -\alpha\,\text{sen}\,u - \beta\cos u & \alpha\cos u - \beta\,\text{sen}\,u & 0 \\ \alpha\cos u - \beta\,\text{sen}\,u & \alpha\,\text{sen}\,u + \beta\cos u & \gamma \end{vmatrix} = \{\gamma(\alpha\cos u - \beta\,\text{sen}\,u), \gamma(\alpha\,\text{sen}\,u + \beta\cos u), -(\alpha^2+\beta^2)\},$$

así que las líneas de estricción quedarán determinadas por el valor $v = v_c = -\frac{(\dot{\underline{D}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})}{(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})(\dot{\underline{d}}\times\underline{d})} = -\frac{\alpha a + \beta b}{\alpha^2+\beta^2}$,

o sea, las curvas: $\underline{w}(u) = \{\frac{(\beta a - \alpha b)(\alpha\,\text{sen}\,u + \beta\cos u)}{\alpha^2+\beta^2}, \frac{(\beta a - \alpha b)(\beta\,\text{sen}\,u - \alpha\cos u)}{\alpha^2+\beta^2}, c - \gamma\frac{\alpha a + \beta b}{\alpha^2+\beta^2}\}$,

que son circunferencias $x^2+y^2 = \frac{(\alpha a+\beta b)^2}{\alpha^2+\beta^2}$ en planos $z = c - \gamma\frac{\alpha a + \beta b}{\alpha^2+\beta^2}$.

Finalmente podremos examinar sus familias de líneas asintóticas. Al ser $g^*=0$, una de estas familias $\underline{a}_1$ coincide, trivialmente, con las curvas **u= cte** que forman la congruencia por rotación de la recta $\underline{c}$ y siendo

$$e^* = \begin{vmatrix} -(\alpha v + a)\cos u + (\beta v + b)\,\text{sen}\,u & -(\alpha v + a)\,\text{sen}\,u - (\beta v + b)\cos u & 0 \\ -(\alpha v + a)\,\text{sen}\,u - (\beta v + b)\cos u & (\alpha v + a)\cos u - (\beta v + b)\,\text{sen}\,u & 0 \\ \alpha\cos u - \beta\,\text{sen}\,u & \alpha\,\text{sen}\,u + \beta\cos u & \gamma \end{vmatrix} =$$

$= -\gamma((\alpha^2+\beta^2)v^2 + 2(\alpha a + \beta b)v + a^2 + b^2)$,

la segunda familia de líneas asintóticas puede obtenerse de la integración de la ecuación diferencial ordinaria:

$\frac{dv}{du} = -\frac{e^*}{2f^*} = -\frac{\gamma((\alpha^2+\beta^2)v^2 + 2(\alpha a + \beta b)v + \alpha^2+\beta^2)}{2\gamma(\alpha b - \beta a)}$, de la que podemos obtener $u = -2\,\text{arc tg}\frac{\beta v + b}{\alpha v + a} + Ç$,

por lo que esta familia vendrá representada por las líneas:

$\underline{a}_2 = ((\alpha v+a)\cos(-2\,\text{arc tg}\frac{\beta v + b}{\alpha v + a} + Ç) - (\beta v+b)\,\text{sen}(-2\,\text{arc tg}\frac{\beta v + b}{\alpha v + a} + Ç),$

$(\alpha v+a)\,\text{sen}(-2\,\text{arc tg}\frac{\beta v + b}{\alpha v + a} + Ç) + (\beta v+b)\cos(-2\,\text{arc tg}\frac{\beta v + b}{\alpha v + a} + Ç), \gamma v + c),$

que verifican $\ddot{\underline{a}}_2 = 0$, así que resultan ser también rectas.

Obtenemos la conclusión de que todas las superficies alabeadas obtenidas en estas condiciones por rotación de una recta sobre un eje son hiperboloides de revolución de una hoja que pueden pasar a denominarse ahora hiperboloides –de revolución– alabeados, constituyendo una propiedad privativa de estas superficies. Sus correspondientes líneas de estricción son sus circunferencias de radio mínimo comúnmente denominadas "círculos de garganta". Junto a los planos, los conos–de revolución– y los cilindros–de revolución– constituyen el conjunto de superficies generadas por rotación de una recta alrededor de un eje.

De todos estos hiperboloides, el engendrado por rotación de la recta **x=z, y=1** alrededor del eje **OZ**, es decir el particularizado por **α=1, β=0, γ=1, a=0, b=1, c=0** es el que hemos venido utilizando en diferentes ejercicios a lo largo de la primera parte del texto (figura 01 y otras posteriores).

Finalmente y con respecto a los puntos singulares de este conjunto de superficies regladas de revolución, resulta evidente que los únicos puntos singulares se presentarán cuando la recta corte al eje –en este caso el **OZ**–. La anulación de la tercera componente del vector:

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \{\gamma\,((\alpha\, v+a)\cos u-(\beta\, v+b)\,\text{sen}\, u),\ \gamma\,((\alpha\, v+a)\,\text{sen}\, u+(\beta\, v+b)\cos u),\ -(\alpha\, a+\beta\, b)-(\alpha^2+\beta^2)\, v\}$$

nos determina que los puntos singulares deberán ser puntos centrales –sobre la línea de estricción–. La anulación de las dos primeras componentes convierte a la línea de estricción en un punto tanto para el caso de un plano obtenido al girar una recta que corta al eje **OZ** en un plano paralelo al **z=0**, como en el caso de un cono con vértice en el eje, en el que deviene, además, cualquier hiperboloide de revolución cuyo círculo de garganta se convierta en un punto (figura 51).

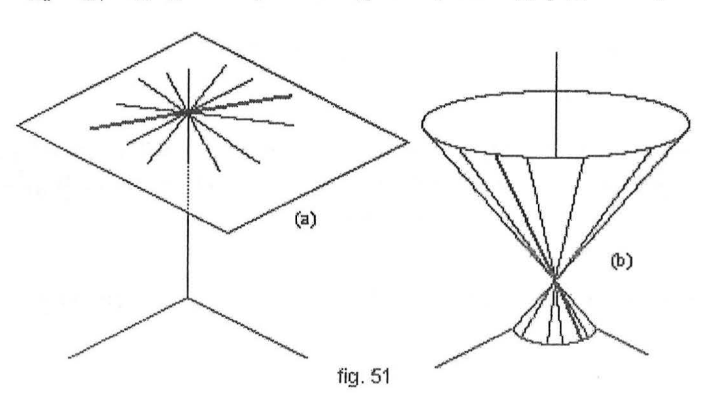


fig. 51

§ 17.- Superficies generadas por el movimiento helicoidal de una recta. Helicoides reglados. El helicoide recto.

Es usual denominar movimiento helicoidal o "giro helicoidal" al producto de un giro y una traslación paralela al eje de giro, pasando el eje a denominarse "eje helicoidal". En el campo de la generación de superficies nos referimos a movimientos euclídeos de este tipo cuando el giro y la traslación pueden describirse en función de un solo parámetro o mejor, cuando la traslación puede expresarse explícitamente en función del ángulo girado. Aquí se nos puede presentar la cuestión de si asociamos lo "helicoidal" con las hélices o no, porque la traslación puede no ser de variación constante o, si se quiere, no ser de pendiente constante. Las superficies generadas por cualquier línea que se mueve con un giro respecto de una recta seguido de una traslación en dirección de la misma expresada de esta forma respecto del giro se denomina comúnmente "una superficie helicoidal" e implícitamente se está considerando que la traslación es una función lineal del giro; la recta base de la rotación más la traslación se convierte en "**eje**" de la superficie (figura 52a). Si la variación de la función que determina la traslación es constante entonces el punto móvil describe un arco de hélice sobre un cilindro de revolución –una hélice circular–. Trivialmente, los movimientos helicoidales incluyen las

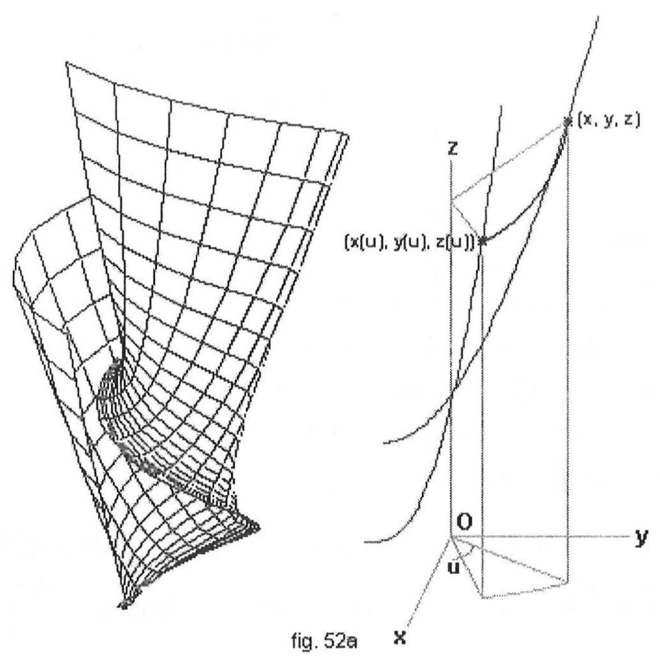


fig. 52a

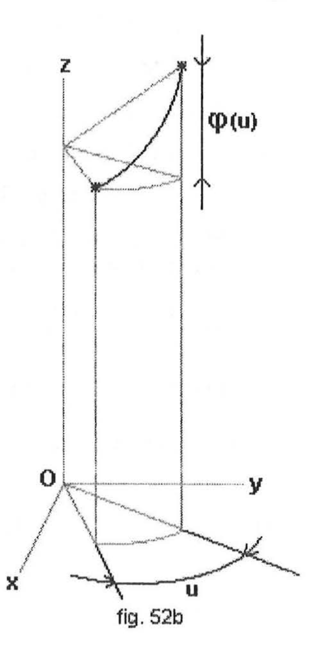


fig. 52b

rotaciones cuando la traslación es nula o constante; en este sentido, las superficies helicoidales incluyen las de rotación y también las puras traslaciones. Las simplificaciones de las representaciones analíticas son muy notables si se elige, por ejemplo, el eje coordenado **OZ** como eje de la superficie helicoidal que es lo que haremos aquí.

Si la traslación sigue una ley no lineal con respecto del giro, la trayectoria del punto móvil describe otro tipo de curva de proyección circular que no es necesariamente una hélice y la "superficie helicoidal" queda desvinculada de las curvas denominadas "hélices". Desde el punto de vista de la generación de superficies regladas este último caso puede resultar tan interesante como el tradicional aunque aquí nos limitemos a las características fundamentales de los helicoides convencionales.

Partiremos del caso más general con superficies engendradas por una recta $\underline{c}$ (v)={α v+a, β v+b, γ v+c} con movimiento "helicoidal" respecto del eje **OZ** que serán las superficies "regladas helicoidales". Si la traslación – paralela al eje – puede escribirse en función del ángulo girado "**u**", (figura 52b), las ecuaciones cartesianas de estas superficies regladas se podrán escribir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u & -\operatorname{sen} u & 0 \\ \operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha v + a \\ \beta v + b \\ \gamma v + c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi(u) \end{pmatrix}$$

Su representación vectorial correspondiente se convierte en:

$$\{(\alpha v+a)\cos u-(\beta v+b)\operatorname{sen} u,\ (\alpha v+a)\operatorname{sen} u+(\beta v+b)\cos u,\ \gamma v+c+\varphi(u)\}=$$
$$=(a\cos u-b\operatorname{sen} u,\ a\operatorname{sen} u+b\cos u,\ c+\varphi(u))+v\{\alpha\cos u-\beta\operatorname{sen} u,\ \alpha\operatorname{sen} u+\beta\cos u,\gamma\} \qquad 8)$$

Las curvas **u=cte** de este conjunto de superficies son las generatrices formadas con la congruencia por movimiento "helicoidal" de la recta $\underline{c}$ cuyas direcciones, independientemente de su posición, vienen dadas por el vector

$\underline{d}$ ={α cos u–β sen u, α sen u+ β cos u, γ},

siendo el giro el determinante del cambio de dirección de las rectas toda vez que la traslación no modifica su dirección.

Aquí es donde podemos encontrar una amplia variedad de superficies según la función **φ(u)** elegida. En la figura 53a se representan algunas superficies –que pueden resultar indicativas – para funciones sencillas no lineales respecto del giro "**u**" tomando como punto de partida la recta $\underline{c}$ (v)={v+1, v+2, v+3}.

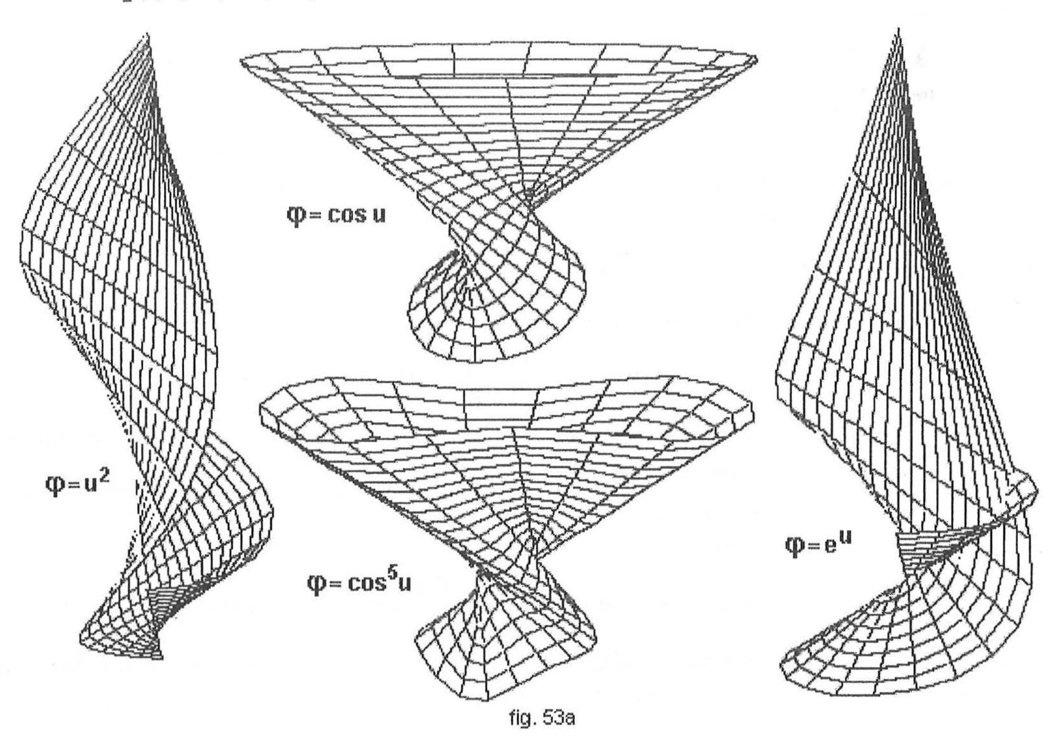


fig. 53a

Como se ha dicho, se acostumbra a denominar "helicoides reglados" a las superficies helicoidales en las que **φ** es una función lineal del parámetro "**u**" o, si se quiere, cuando simplemente **φ(u)= h u** – se puede utilizar $\varphi(u)=\dfrac{h}{2\pi}u$, para ajustar el factor de escala al paso de hélice –. En estas condiciones las congruencias de hélices circulares se convertirán en curvas de las superficies.

Mantendremos aquí la denominación de "helicoides reglados" a las superficies regladas helicoidales en las que genéricamente $\varphi(u)= c_1\, u+c_2$. Serán helicoides reglados, por ejemplo, los de la figura 53b, generados con la misma recta **(v+1, v+2, v+3)** para distintas funciones lineales del parámetro "**u**": $\varphi = u$, $\varphi = 1-u$, $\varphi = 3u-1$,...

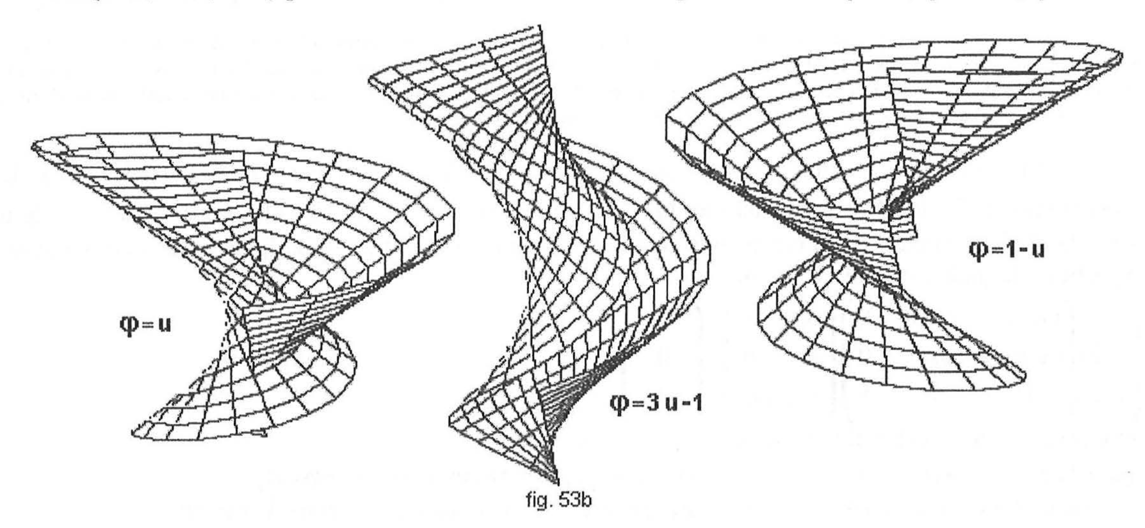


fig. 53b

Independientemente de todo lo anterior, el parámetro de distribución de este conjunto amplio de superficies "helicoidales" generadas por rectas, con φ cualquier función regular arbitraria, será:

$$f^*(u)=\begin{vmatrix} -a\cos u - b\,\mathrm{sen}\,u & a\cos u - b\,\mathrm{sen}\,u & \dot\varphi \\ \alpha\cos u - \beta\,\mathrm{sen}\,u & \alpha\,\mathrm{sen}\,u + \beta\cos u & \gamma \\ -\alpha\,\mathrm{sen}\,u - \beta\cos u & \alpha\cos u - \beta\,\mathrm{sen}\,u & 0 \end{vmatrix} = (\alpha\, b-\beta\, a)\,\gamma+\dot\varphi\,(\alpha^2+\beta^2).$$

No siendo nulos α, β, γ simultáneamente, lo que convertiría a la recta en un punto y a la superficie en una curva, las superficies resultarán ser desarrollables en los siguientes casos:

a) $\alpha\, b-\beta\, a = 0$, $\alpha^2+\beta^2= 0 \Rightarrow \alpha=0, \beta=0$. Con $\gamma\neq 0$, la recta resulta paralela al eje y la superficie se convierte en el cilindro **(a cos u–b sen u, a sen u+ b cos u, c+φ(u))+v {0, 0, 1}**.

b) $\alpha\, b-\beta\, a = 0, \dot\varphi=0 \Rightarrow \varphi=cte$. Si $\alpha=0$, $\beta=0$ se engendra un cilindro de revolución. Si α, β no son simultáneamente nulos, la superficie se convierte en una superficie de revolución y la congruencia de rectas cortan al eje **OZ** con lo que deviene en un cono con vértice en el eje.

c) $(\alpha\, b-\beta\, a)\,\gamma+\dot\varphi\,(\alpha^2+\beta^2)= 0$, con $\alpha\, b-\beta\, a \neq 0, \gamma\neq 0, \alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Este último caso, no trivial, es el que nos interesa destacar. Se deduce de tal condición que

$$\dot\varphi\,(u)=-\frac{\gamma(\alpha b-\beta a)}{\alpha^2+\beta^2} \quad \text{y de aquí:} \quad \varphi(u)=-\frac{\gamma(\alpha b-\beta a)}{\alpha^2+\beta^2}u+Ç, \quad \text{con } Ç=cte.$$

Así pues, del conjunto más general de superficies helicoidales, las únicas desarrollables distintas de los conos y los cilindros que verifican $\varphi(u)=-\frac{\gamma(\alpha b-\beta a)}{\alpha^2+\beta^2}u+Ç$, serán los que denominados "helicoides desarrollables", vendrán determinados por la representación:

$$\underline{D}+v\,\underline{d}=\left(\left(a\cos u-b\,\mathrm{sen}\,u,\ a\,\mathrm{sen}\,u+b\cos u,\ c-\frac{\gamma(\alpha b-\beta a)}{\alpha^2+\beta^2}u+Ç\right)+v\,\{\alpha\cos u-\beta\,\mathrm{sen}\,u,\ \alpha\,\mathrm{sen}\,u+\beta\cos u,\ \gamma\}\right.$$

Sus puntos serán todos, trivialmente, parabólicos siendo las curvas **v=cte** hélices circulares. Sus "aristas de retroceso" las obtendremos con el cálculo de los vectores:

$$\dot{\underline{D}}\times\underline{d}=\begin{vmatrix} -a\,\mathrm{sen}\,u - b\cos u & a\cos u - b\,\mathrm{sen}\,u & -\frac{\gamma(\alpha b-\beta a)}{\alpha^2+\beta^2} \\ \alpha\cos u - \beta\,\mathrm{sen}\,u & \alpha\,\mathrm{sen}\,u + \beta\cos u & \gamma \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\frac{\gamma(\alpha b-\beta a)}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos u-\beta\,\mathrm{sen}\,u),\ \frac{\gamma(\alpha b-\beta a)}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\,\mathrm{sen}\,u+\beta\cos u),\ -(\alpha\, a+\beta\, b)\right\}$$

$$\overset{\bullet}{\underline{d}}\times\underline{d}=\begin{vmatrix} -\alpha\,\mathrm{sen}\,u-\beta\cos u & \alpha\cos u-\beta\,\mathrm{sen}\,u & 0\\ \alpha\cos u-\beta\,\mathrm{sen}\,u & \alpha\,\mathrm{sen}\,u+\beta\cos u & \gamma\end{vmatrix}=\{\gamma(\alpha\cos u-\beta\,\mathrm{sen}\,u),\ \gamma(\alpha\,\mathrm{sen}\,u+\beta\cos u),\ -(\alpha^2+\beta^2)\},$$

y de aquí, los puntos centrales –singulares– con $v = v_c = -\dfrac{(\overset{\bullet}{\underline{D}}\times\underline{d})(\overset{\bullet}{\underline{d}}\times\underline{d})}{(\overset{\bullet}{\underline{d}}\times\underline{d})(\overset{\bullet}{\underline{d}}\times\underline{d})} = -\dfrac{\alpha a+\beta b}{\alpha^2+\beta^2}$, nos determinarán las curvas:

$$\underline{w}(u)=\{\frac{\beta a-\alpha b}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\,\mathrm{sen}\,u+\beta\cos u),\ \frac{-\beta a+\alpha b}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos u-\beta\,\mathrm{sen}\,u),\ c+Ç+\frac{-\gamma(\alpha a+\beta b)+\gamma(\beta a-\alpha b)u}{\alpha^2+\beta^2}\},$$

cuyas tangentes tendrá la dirección

$$\overset{\bullet}{\underline{w}}(u)=\{\frac{\beta a-\alpha b}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos u-\beta\,\mathrm{sen}\,u),\ \frac{\beta a-\alpha b}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\,\mathrm{sen}\,u+\beta\cos u),\ \frac{\gamma(\beta a-\alpha b)}{\alpha^2+\beta^2}\},$$

que es la dirección de las generatrices **{α cos u– β sen u, α sen u+β cos u, γ}**, por lo que todas estas superficies son, como era de esperar, superficies de desarrollo tangencial –de su arista de retroceso–. En la figura 54 se representa un fragmento de helicoide de desarrollo tangencial para la recta **(v+1, v+2, v+3)** (**φ=u/2**) y su línea de estricción cuyas tangentes son las propias generatrices.

l.e.

fig. 54

La arista de retroceso de los helicoides desarrollables es naturalmente una de las hélices circulares de la superficie, sus curvaturas de flexión y torsión son respectivamente:

$$k=\frac{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{(\alpha b-\beta a)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)},\quad \tau=-\frac{\gamma(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha b-\beta a)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)},\ \text{siendo}$$

$$\frac{k}{\tau}=-\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\gamma}=\mathrm{tg}\,\theta \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta=-\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},\ \cos\theta=\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},$$

donde θ es el ángulo –constante– que forman las tangentes a la hélice con el eje OZ.

El resto serán los helicoides reglados no desarrollables o "helicoides alabeados" que quedarán determinados genéricamente por una función φ lineal respecto del parámetro "u", es decir, con $\varphi(u)= c_1\,u+c_2$ siendo $c_1+\dfrac{\gamma(\alpha b-\beta a)}{\alpha^2+\beta^2}\neq 0$, y representados por:

$$((a\cos u-b\,\mathrm{sen}\,u,\ a\,\mathrm{sen}\,u+b\cos u,\ c+c_1 u+c_2)+v\,\{\alpha\cos u-\beta\,\mathrm{sen}\,u,\ \alpha\,\mathrm{sen}\,u+\beta\cos u,\ \gamma\}.$$

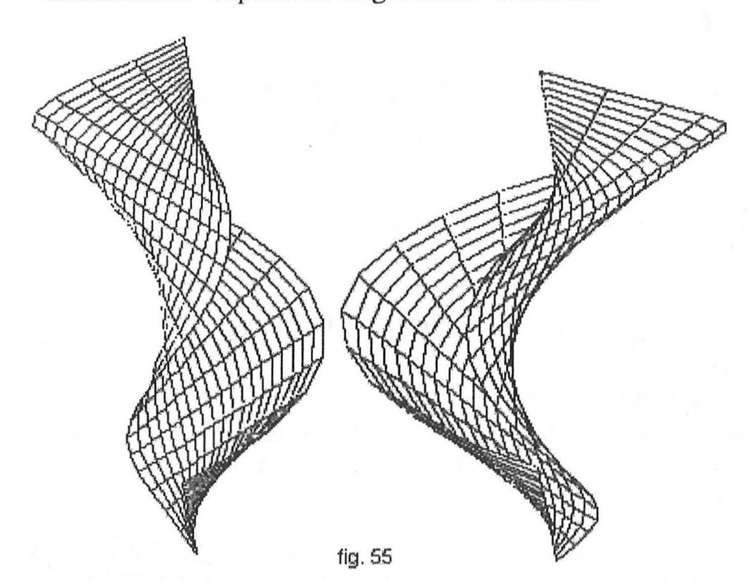
Su parámetro de distribución se convierte ahora en $f^*=(\alpha^2+\beta^2)c_1+\gamma(\alpha b-\beta a)\neq 0$. En estas superficies todos los puntos son hiperbólicos. Los puntos centrales se obtienen para $v = v_c = -\dfrac{\alpha a+\beta b}{\alpha^2+\beta^2}$, así que sus líneas de estricción serán las curvas: $\underline{w}(u)=\{\dfrac{\beta a-\alpha b}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\,\mathrm{sen}\,u+\beta\cos u),\ \dfrac{-\beta a+\alpha b}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos u-\beta\,\mathrm{sen}\,u),\ c-\dfrac{\gamma(\alpha a+\beta b)}{\alpha^2+\beta^2}+c_1 u+c_2\}$,

siendo $\overset{\bullet}{\underline{w}}(u)=\{\dfrac{\beta a-\alpha b}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos u-\beta\,\mathrm{sen}\,u),\ \dfrac{\beta a-\alpha b}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\,\mathrm{sen}\,u+\beta\cos u),\ c_1\}$, vector equivalente al

$\{(\alpha\cos u-\beta\,\mathrm{sen}\,u),\ (\alpha\,\mathrm{sen}\,u+\beta\cos u),\ c_1\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta a-\alpha b}\}$, asi que cuando $c_1=-\dfrac{\gamma(\alpha b-\beta a)}{\alpha^2+\beta^2}$, las superficies se convierten en desarrollos tangenciales de esta línea que deviene en arista de retroceso.

Se denominan helicoides "cerrados" a los helicoides cuando la congruencia de generatrices corta al eje y "abiertos" cuando no son coplanarios con él –ni lo cortan ni son paralelos–. Con esta denominación los "helicoides alabeados cerrados" son consecuencia del giro helicoidal de la recta $\underline{c}(v)$ en la que $\alpha b-\beta a=0$, $\alpha^2+\beta^2=0$; en este caso, la línea de estricción $\underline{w}(u)=\{0,\ 0,\ c-\dfrac{\gamma(\alpha a+\beta b)}{\alpha^2+\beta^2}+c_1 u+c_2\}$ se convierte en el propio eje **(OZ)** de la superficie.

En los helicoide abiertos la línea de estricción se denomina "hélice de garganta" del helicoide (alabeado) que se convertirá en un arista de retroceso cuando es desarrollable. Obviamente no pueden existir helicoides desarrollables –superficies tangenciales– cerrados.


fig. 55

En los helicoides abiertos – de eje **OZ** –, fijada la recta inicial $\underline{c}$ (v) y la función $\varphi=c_1 u+c_2$ – básicamente c_1 –, se determina la superficie; pero en la práctica es usual generar estos helicoides por rectas que se apoyan en cualquier hélice circular –una directriz– con las condiciones adicionales necesarias para fijar la dirección de las generatrices en función del parámetro "u" de la hélice que pueden ser tan simples como el que las generatrices sean, por ejemplo, rectas del triedro de la curva, cuando sean sus tangentes obtendremos su superficie de desarrollo tangencial y la propia hélice se convierte en su arista de retroceso. Los helicoides alabeados abiertos tienen una apariencia inconfundible y en cierto modo muy previsible como la de los tradicionales que se representan en la figura 55.

Algunos ejemplos de los procedimientos citados y de los que se describen a continuación para la generación de los helicoides se han incluido en el cuaderno I. J. H.- nº 3-53-01: "Generación de superficies regladas en forma paramétrica".

Desde el punto de vista constructivo la generación de helicoides cerrados –de eje **OZ**– pueden describirse por rectas que apoyándose en una hélice circular y en su eje –su línea de estricción– cumplan, además, cualquier otra condición que individualicen adecuadamente la superficie. Podemos imponer, por ejemplo, la condición de que las generatrices forman con el eje un ángulo constante "θ"; estos son los denominados "helicoides oblicuos" si $\theta\neq\pi/2$ y "helicoides rectos" si $\theta=\pi/2$ o bien imponer que sean al mismo tiempo conoides. Examinaremos brevemente algunas de estos helicoides cerrados sobre una notación más reducida.

En los helicoides reglados cerrados de eje **OZ** con $\alpha\, b-\beta\, a=0$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, podemos situar la recta $\underline{c}$ (v) –no paralela al eje– en el plano **XOZ** y el ángulo "**u**" será el ángulo barrido desde el eje **OX**. Sin pérdida de generalidad, se obtienen todos los helicoides cerrados con la recta parametrizada en la forma $\underline{c}(v)=(a+v, 0, \gamma v)$, y la representación de la superficie vendrá determinada por la función vectorial:

$\underline{r}(u, v)=\{(v+a)\cos u, (v+a)\operatorname{sen} u, \gamma v+c_1 u+c_2\}$; podemos, además, prescindir, si se quiere, de "c_2" haciendo la adecuada traslación de ejes coordenados en dirección **OZ** con módulo c_2. La superficie quedará representada por:

$((v+a)\cos u, (v+a)\operatorname{sen} u, \gamma v+c_1 u+c_2)=(a\cos u, a\operatorname{sen} u, c_1 u)+v\{\cos u, \operatorname{sen} u, \gamma\}$, cuya línea de estricción –eje **OZ**– se obtiene para $v=-a$.

La recta $\underline{c}$ (v) cuya dirección es la del vector $\{1, 0, \gamma\}$ forma con el eje **OZ** un ángulo $\cos\theta=\dfrac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \Rightarrow \gamma=\operatorname{cotg}\theta$,

así que los helicoides oblicuos –cuyas generatrices forman un ángulo constante "θ" con el eje– tendrán la representación:

$(a\cos u, a\operatorname{sen} u, c_1 u)+v\{\cos u, \operatorname{sen} u, \operatorname{cotg}\theta\}$ con $\theta\neq\pi/2$,

y los helicoides rectos:

$(a\cos u, a\operatorname{sen} u, c_1 u)+v\{\cos u, \operatorname{sen} u, 0\}$ $(\theta=\pi/2, \gamma=0)$,

En estos últimos, las generatrices son, trivialmente, paralelas al plano $z=0$ por lo que se trata de un conoide recto cuyo eje es la línea de estricción de la superficie y eje al mismo tiempo del helicoide. Cada hélice circular de eje **OZ**: $h(u)=\{a\cos u, a\operatorname{sen} u, c_1 u\}$ tiene "asociada", obviamente, un único conoide recto; como se verifica $\dot{\underline{h}}\cdot\ddot{\underline{h}}=0$, el vector $\ddot{\underline{h}}=\{-a\cos u, -a\operatorname{sen} u, 0\}$ tiene directamente la dirección de la normal principal a la hélice en cada uno de sus puntos que es la dirección de las generatrices asi que el helicoide recto coincide con el generado por sus normales principales.

Podemos completar este análisis buscando los helicoides cerrados engendrados por una hélice que sean al mismo tiempo conoides; o, si se quiere, conoides generados por rectas que se apoyan en cualquier hélice circular $(a\cos u, a\operatorname{sen} u, c_1 u)$ y en su eje **OZ**: $(0, 0, \lambda)$.

Las generatrices de tales superficies tendrán la dirección $\{a\cos u, a\operatorname{sen} u, c_1 u-\lambda\}$,que deberá satisfacer para un plano director cualquiera, que corte al eje, $A x+B y+C z+D=0$, con $C\neq 0$, la condición:

$A\, a\cos u+B\, a\operatorname{sen} u+C(c_1 u-\lambda)=0$ de donde $\lambda=\dfrac{Aa}{C}\cos u+\dfrac{Ba}{C}\operatorname{sen} u+c_1 u$.

Estas superficies podrán representarse, por lo tanto, mediante la parametrización:

$$(a\cos u, a\operatorname{sen} u, c_1 u)+v\{\cos u, \operatorname{sen} u, -\frac{Aa}{C}\cos u-\frac{Ba}{C}\operatorname{sen} u\}=$$

$$=((a+v)\cos u, (a+v)\operatorname{sen} u, c_1 u-v(\frac{Aa}{C}\cos u-\frac{Ba}{C}\operatorname{sen} u)),$$

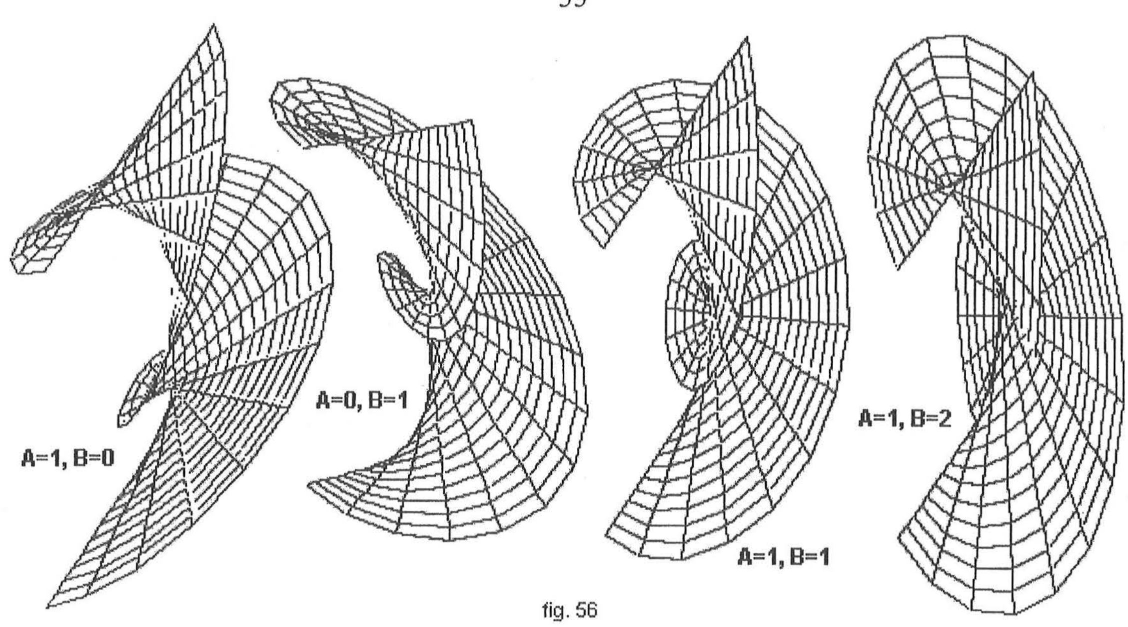
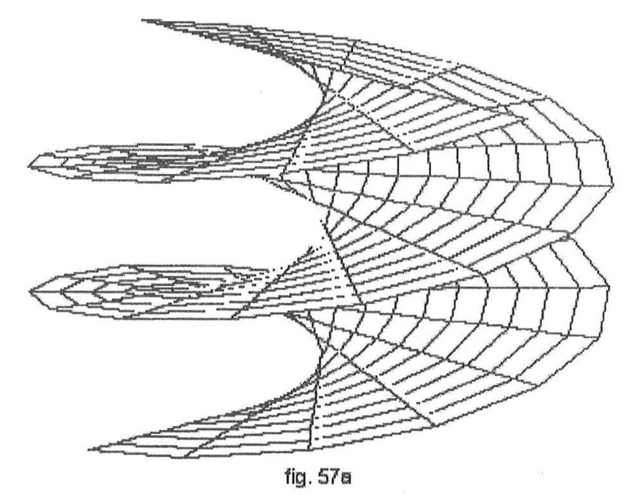
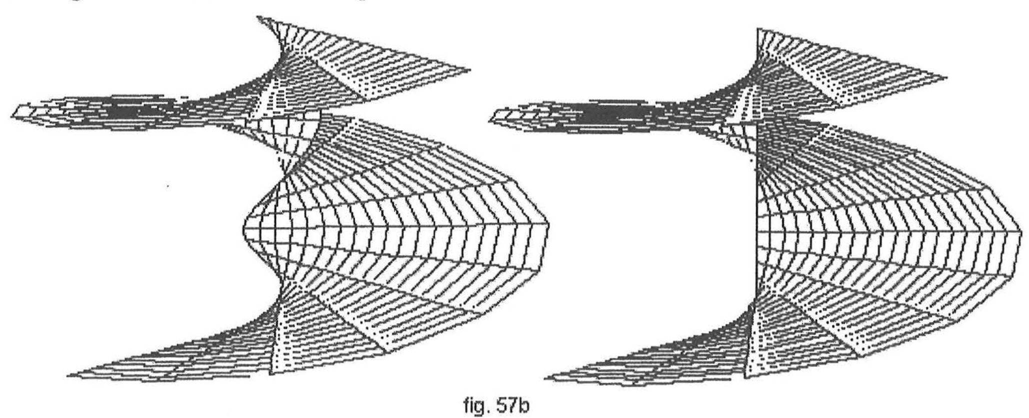


fig. 56

a los que denominaremos "helicoides con plano director" que son todos helicoides oblicuos. En la figura 56 se presentan algunos, tomando como hélice la curva **(cos u, sen u, u)** y eligiendo diferentes planos directores, con **C=1** y distintos valores de **A** y **B**.

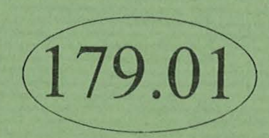
El helicoide recto con plano director para **A=0, B=0**:
(a cos u, a sen u, c_1 u)+v{cos u, sen u, 0},
contiene a su línea de estricción para **v= −a**; tomándola como directriz de la representación su parametrización intrínseca que coincide además con su parametrización canónica, resulta ser:
(0, 0, c_1 u)+v{cos u, sen u, 0}=(v cos u, v sen u, c_1 u),
parametrización tan sencilla como conocida de una superficie que, como se ha dicho, es la generada, además, por las normales principales de cualquiera de las hélices circulares contenida en la superficie. Este "helicoide cerrado, recto, de plano director" es conocido simplemente como "helicoide recto", único conoide recto de una hélice circular. Es una superficie que reúne otras diferentes propiedades, y, al mismo tiempo, extraordinariamente interesante desde el punto de vista tanto constructivo como estructural dentro del campo de la arquitectura o la decoración. En la figura 57a se representa un fragmento básico del helicoide y en la 57b otros fragmentos obtenidos restringiendo adecuadamente su parámetro "**v**".


fig. 57a


fig. 57b

NOTAS

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

